STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

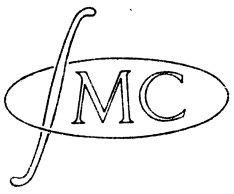
Rapport S 336

Syllabus van het

Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Prof.dr. J.Th. Runnenburg

LIMIETVERDELINGEN VAN SOMMEN VAN ONAFHANKELIJKE VARIABELEN



december 1964

Inhoudsopgave rapport S336

Errata	E1
1. Karakteristieke functies	1
1.1. Definitie en eenvoudige eigenschappen	1
1.2. Analytische karakteristieke functies	8
1.3. Omkeerstellingen	16
1.4. Limieten van verdelingsfuncties	21
1.5. Voorbeelden	27
2. Limietstellingen	33
2.0. Samenvatting	33
2.1. Inleiding	33
2.2. Oneindig deelbare verdelingen	48
2.3. Algemene limietstellingen	69
2.4. Zelfafsplitsbare verdelingen	97
2.5. Stabiele verdelingen	115
Literatuuroverzicht	127

Errata in rapport S336 (Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening)

blz.	regel	staat:	moet staan:
1	4 v.b. a)	varaible d	variabele $d\mu$
3	4 v.b.	$\phi_{\underline{x}}(t) = 0$	$\lvert\phi_{\underline{x}}(t)\rvert = 1$
9	2 v.b. 4 v.b. 5 v.o.	$e^{v\underline{x}}$ een δ $\underline{x}^{2m}$	$\mathfrak{E}\ e^{v\underline{x}}$ een $\delta > 0$ $\mathfrak{E}\ \underline{x}^{2m}$
10	4 v.b. 8 v.b.	$\lvert z\rvert < \alpha$ is In z	$\lvert z\rvert < \alpha$ Im z
12	5 v.b.	$e^{p(0)}$	$e^{P(0)}$
13	10 v.b.	$\cos(\quad + \frac{n\pi}{2})$	$\cos(\beta + \frac{n\pi}{2})$
25	4 v.b.	$\lvert t\rvert \leq T$.	$\lvert t\rvert \leq T$ is uniform.
33	13 v.o.	verdere resultaten	eigenschappen van zelf-afsplitsbare en stabiele verdelingen
34	3 v.o.	$\mathfrak{M}$ '	$\mathfrak{M}$
39	2 v.o. 1 v.o.	monotton M met	monotoon M, die continu van rechts zijn en voldoen aan
46	2 v.b.	$\phi_n(t)$	$\phi(t_n)$

52	4 v.o.	intepatie	integratie
54	13 v.b.	$\underline{x}$ - en	$\underline{x}_j$
58	1 v.o.	$\left\| \int_{-\infty}^{0} \ldots \right\|$	$\left[\int_{-\infty}^{0} \ldots \right]$
59	3 v.b.	$0 < \sigma^2$	$0 \leq \sigma^2$
	4 v.b.	aanvullen met:	M is continu van rechts;
	5 v.b.	aanvullen met:	N is continu van rechts;
	4 v.o.	$\|u\| \leq \tau$	$\|u\| \geq \tau$
		$\|u\| > \tau$	$\|u\| < \tau$
67	13 v.b.	is	in
69	11 v.b.	$\underline{x}_{nk} - \underline{x}_{nk}$	$\underline{x}_{nk} - \mathcal{E}\underline{x}_{nk}$
	13 v.b.	k {	$k \in$ {
71	(5)	$\underline{x}_n =$	$\underline{s}_n =$

74 Vanaf formule (14) tot aan "Bewijs" behoort de tekst in te springen, daar dit een deel is van bewering b).

75	13 v.o.	σ_k	σ_k^2
	5 v.o.	$\sigma(n)$	$\sigma^2(n)$
	3 v.o.	RÈNYI	RÉNYI
76	1 en 3 v.b.	k_n	n
	3 v.b.	$\|y_k - \mu_k\|$	$(y_k - \mu_k)$
77	5 v.b.	$r \leq s$	$r < s$
78	(24)	$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}$	$\lim_{n\to\infty} \sum_k \mathcal{E}$
	(26)	dF_{nk}	$\hat{dF}_{nk}$

79	4 v.b.	$\lvert\hat{x}_{nk}\rvert$	$\lvert\hat{\underline{x}}_{nk}\rvert$
	6 v.b.	$\sum_k \hat{x}_{nk}$	$\sum_k \hat{\underline{x}}_{nk}$
	(30)	$\lvert x\rvert < 1$	$\lvert x\rvert > 1$
	6 v.o.	$\mathfrak{E}\ \hat{z}_n'^2$	$\sum_k \mathfrak{E}\ \hat{\underline{x}}_n'^2$
88	7 v.b.	telt... bij A_n op	trekt... van A_n af
89	2 v.o.	$\gamma(\tau)$, G).	γ, G), waar γ volgt uit $\gamma(\tau)$ zoals op blz. 65 regel 4 v.b.
93	(70)	$\lvert y\rvert < \varepsilon B_n$	$\lvert y\rvert \geq \varepsilon B_n$
94	9 v.b.	x_k	$\underline{x}_k$
	1 v.o.	Toevoegen: Voor keuze A_n zie st. 2.3.14.	
99	e.v. Men leze overal b.v. $\underline{y}_k/B_n$ als $\frac{\underline{y}_k}{B_n}$ (de breuk staat dus niet in de index).		
100	(10)	$(B_{n+1}x + A_{n+1})$	$(B_{n+1}(x + A_{n+1}))$
	(11)	$(B_n x + A_n)$	$(B_n(x + A_n))$
101	(12)	$\frac{\phi_{k-1}(t)}{k}$	$\frac{\phi_{k-1}(kt)}{k}$
	11 v.b.	teriestieke	teristieke
	8 en 9 v.o.	$\underline{y}_{k/n}$	$\underline{y}_k\ n^{-1}$
103	10 v.o.	convex	concaaf
105	4,10 en 13 v.o.	convex	concaaf
	12 v.o.	dus	want
106	4 v.b.	G(u+h) - G(u)	$G(e^{u+h}) - G(e^u)$
	9 v.b.	convexiteit	concaviteit

107	11 v.o.	σ^2. $\imath(x)$	σ^2. $\imath(u)$
110	(43)	$\bar{G}$ en G	$\bar{G}$ en $\tilde{G}$
116	7 en 13 v.b.	- iat	- iau/b
117	11 v.b. 14 v.b.	γ men voor	$\tilde{\gamma}$ men $\sigma^2(1+B^2) = \sigma^2 b^2$ en voor
124	11 v.o.	voor $\delta > \alpha$.	voor $\delta \geq \alpha$ als G de stabiele verdeling zelf is.

NN

I. Karakteristieke functies

1.1 Definitie en eenvoudige eigenschappen

In het volgende zullen we te maken krijgen met het integreren van complexe functies van een reële varaibele. In verband hiermee moeten we een aantal definities uitbreiden. We gaan uit van de (reële) maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en definiëren:

Def. 1.1.1: de functie $f(x) = u(x)+iv(x)$ (u en v reële functies) heet meetbaar (sommeerbaar), als zowel $u(x)$ als $v(x)$ meetbaar (sommeerbaar) zijn.

Def. 1.1.2: $\int_X f(x)d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X u(x)d\mu+i\int_X v(x)d\mu$.

Uitgaande van deze definitie bewijst men gemakkelijk, dat voor complexe sommeerbare functies geldt

a) $\int \alpha f(x)d\mu = \alpha\int f(x)d$ voor elke complexe α

b) $\int \overline{f}(x)d\mu = \overline{\int f(x)d\mu}$

c) $\left|\int f(x)d\mu\right| \leq \int |f(x)|d\mu$

bij integratie over een willekeurige meetbare verzameling.
Eigenschap c) kan als volgt bewezen worden:
als $\int f(x)d\mu = re^{i\phi}$, dan is $r = \left|\int f(x)d\mu\right| = \int e^{-i\phi}f(x)d\mu =$
$= \int \mathrm{Re}\{e^{-i\phi}f(x)\}d\mu \leq \int |f(x)|d\mu$.

Men gaat verder zonder veel moeite na, dat vrijwel alle stellingen, die we voor reële meetbare functies hebben bewezen, zoals de stellingen van Fubini en Lebesgue ook voor complexe meetbare functies gelden. In het volgende zullen we deze stellingen zonder verdere toelichting op complexe functies toepassen.

We zijn nu in staat om het begrip karakteristieke functie van een stochastische variabele te definiëren:

Def. 1.1.3: als $\underline{x}$ een stochastische variabele is op het kansveld $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ dan wordt de karakteristieke functie, $\phi_{\underline{x}}(t)$ van

$\underline{x}$ gedefinieerd door

(1) $$\phi_{\underline{x}}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{E} e^{i\underline{x}t} = \int_{\Omega} e^{ix(\omega)t} dP = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} dF_{\underline{x}}(y),$$

waarin $F_{\underline{x}}$ de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ voorstelt en $\underline{t}$ reëel is.

Voor een stochastische vector $\underline{x}=(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ definieert men analoog

Def. 1.1.4: $$\phi_{\underline{x}}(t) = \phi_{\underline{x}}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \mathcal{E} \exp i\Big(\sum_{j=1}^{n} \underline{x}_j t_j\Big).$$

We zullen ons voorlopig op een enkele uitzondering na beperken tot het geval n=1.

De volgende eigenschappen van karakteristieke functies zijn evident:

k_1 $\quad \phi_{\underline{x}}(0) = 1$

k_2 $\quad |\phi_{\underline{x}}(t)| \leq 1$

k_3 $\quad \phi_{\underline{x}}(-t) = \phi_{-\underline{x}}(t) = \overline{\phi_{\underline{x}}(t)}$

k_4 $\quad \phi_{a\underline{x}+b}(t) = e^{bit}\phi_{\underline{x}}(at)$

k_5 $\quad \phi_{\underline{x}}(t)$ is uniform continu op $(-\infty,\infty)$.

Def. 1.1.5: $\underline{x}$ heet een roostervariabele, als $\underline{x}$ met kans één waarden $a+bj$ (a en b reëel, $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$) aanneemt.

St.1.1.1.: $\underline{x}$ is dan en slechts dan een roostervariabele, als er een waarde $t_0\neq0$ is met $|\phi_{\underline{x}}(t_0)|=1$.

Bewijs: als $\underline{x}$ een roostervariabele is met $p_j=P\{\underline{x}=a+b_j\}$, dan is

$$\phi_{\underline{x}}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j e^{it(a+b_j)} = e^{ita} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j e^{itb_j}, \text{ zodat } |\phi_{\underline{x}}(\tfrac{2\pi}{b})|=1$$

is.

Als anderzijds $|\phi_{\underline{x}}(t_0)|=1$ is met $t_0\neq0$, dan is er een reële a met $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0y} dF_{\underline{x}}(y) = e^{it_0a}$, dus

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0(y-a)} dF_{\underline{x}}(y)=1$, zodat $\int_{-\infty}^{\infty} \{1-\cos t_0(y-a)\}\, dF_{\underline{x}}(y)=0$.

Hieruit volgt, dat $F_{\underline{x}}(y)$ slechts kan toenemen in punten waar $\cos t_0(y-a)=1$, dus voor $y=a+\frac{2\pi j}{t_0}$ (zie rapport S295, eigenschap I 8, blz. 119).

St. 1.1.2: als $\phi_{\underline{x}}(t)=0$ voor $t=t_0\neq 0$ en $t=t_0'\neq 0$ terwijl $\frac{t_0}{t_0'}$ irrationaal is, dan is er een α met $P\{\underline{x}=\alpha\}=1$ en dus $\phi_{\underline{x}}(t)=e^{i\alpha t}$.

Bewijs: stel $\underline{x}$ neemt met positieve kansen de waarden y_1 en $y_2\neq y_1$ aan. Dan geldt

$$y_1=a_1+\frac{2\pi}{t_0}j_1 = a_1'+\frac{2\pi}{t_0'}j_1'$$

$$y_2=a_1+\frac{2\pi}{t_0}j_2 = a_1'+\frac{2\pi}{t_0'}j_2'.$$

Aftrekken levert $\frac{j_1-j_2}{t_0}=\frac{j_1'-j_2'}{t_0'}$, waaruit wegens de irrationaliteit van $\frac{t_0}{t_0'}$ volgt, dat $j_1=j_2$ en $j_1'=j_2'$ in tegenspraak tot de veronderstelling, dat $y_1\neq y_2$ is.

Als we de beide uiterste leden van (1) formeel differentiëren en t=0 substitueren, dan vinden we $\phi_{\underline{x}}'(0) = i\mathcal{E}\underline{x}$. In het nu volgende zullen we het verband, dat bestaat tussen de afgeleiden van $\phi_{\underline{x}}(t)$ en de momenten van $\underline{x}$, behandelen.

We voeren de volgende notatie in:

Def. 1.1.6: als h(x) een complexe functie is, dan worden de centrale differenties van h(x) gedefinieerd door

$$\Delta_s h(t) = \Delta_s^1 h(t) = h(t+s) - h(t-s)$$

$$\Delta_s^n h(t) = \Delta_s(\Delta^{n-1}h(t)) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-)^m h(t+(n-2m)s).$$

Speciaal is

$$\Delta_s^n e^{itx} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-)^m e^{itx}\, e^{ix(n-2m)s} = e^{itx}(2i\sin sx)^n.$$

Lemma 1.1.1: Als de n^e afgeleide van $h(t)$ bestaat voor $t=t_0$, dan is

$$h^{(n)}(t_0) = \lim_{s\to 0} \frac{\Delta_s^n h(t_0)}{(2s)^n}$$

Bewijs: We gebruiken de stelling van de l'Hôpital in de volgende vorm

$$\left.\begin{array}{l} f^{(k)}(0)=g^{(k)}(0)=0 \ (k=0,1,\ldots,n-1) \\ f^{(n)}(0) \text{ bestaat en } g^{(n)}(0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)} .$$

Als we f en g als volgt kiezen

$$f(s) = \Delta_s^n h(t_0)$$
$$g(s) = (2s)^n,$$

dan is aan de voorwaarden van de stelling van de l'Hôpital voldaan, immers

$$f^{(k)}(0)= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}(-)^m h^{(k)}(t_0)(n-2m) = h^{(k)}(t_0)\left[\left(\frac{d}{ds}\right)^k \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}(-)^m e^{(n-2m)s}\right]_{s=0} =$$

$$= h^{(k)}(t_0) \left[\left(\frac{d}{ds}\right)^k e^{ns}(1-e^{-2s})^n\right]_{s=0} = \begin{cases} 0 & (0\leq k<n) \\ 2^n n! h^{(k)}(t_0) & (k=n) \end{cases} .$$

Voor g(s) geldt triviaal

$$g^{(k)}(s) = \begin{cases} 0 & (0\leq k<n) \\ 2^n n! & (k=n) \end{cases} ,$$

zodat het lemma uit de stelling van de l'Hôpital volgt.
We bewijzen nu

St. 1.1.3: als $\phi_{\underline{x}}(t)$ 2n maal differentieerbaar is voor t=0, dan bestaan de eerste 2n momenten van $\underline{x}$, d.w.z., dan is $\mathcal{E}|\underline{x}|^{2n} < \infty$. Omgekeerd: als $\mathcal{E}|\underline{x}|^{n} < \infty$ is, dan is $\phi_{\underline{x}}(t)$ n maal differentieerbaar, terwijl $\phi_{\underline{x}}^{(n)}(t)$ uniform continu is op $(-\infty,\infty)$.

Bewijs: $\dfrac{\Delta_s^{2n}\phi_{\underline{x}}(0)}{(2s)^{2n}}$ is begrensd, dus

$$M \geq \left| \frac{\Delta_s^{2n}\phi_{\underline{x}}(0)}{(2s)^{2n}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta_s^{2n} e^{ity}}{(2s)^{2n}} \right)_{t=0} dF_{\underline{x}}(y) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin sy}{s} \right)^{2n} dF_{\underline{x}}(y).$$

Voor alle eindige positieve a en b geldt nu dus op grond van gemajoreerde convergentie

$$\int_{-a}^{b} y^{2n} dF_{\underline{x}}(y) \leq M,$$

zodat ook $\mathcal{E}|\underline{x}|^{2n} \leq M$ is.

Is omgekeerd $\mathcal{E}|\underline{x}|^{n} < \infty$ dan is op grond van eigenschap I17 (blz. 126 van S295) $\phi_{\underline{x}}(t)$ n maal differentieerbaar met

$$\phi_{\underline{x}}^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} y^n e^{ity} dF_{\underline{x}}(y).$$

Men gaat gemakkelijk na $\phi_{\underline{x}}^{(n)}(t)$ uniform continu is op $(-\infty,\infty)$.

Opm.: voor oneven n kan het voorkomen, dat $\phi_{\underline{x}}^{(n)}(t)$ bestaat, terwijl $\mathcal{E}|\underline{x}|^{n} = \infty$ is. Een voorbeeld hiervan levert de stochastische variabele $\underline{x}$, met verdelingsdichtheid

$$f_{\underline{x}}(y) = \begin{cases} \dfrac{c}{y^2 \log|y|} & |y| \geq 2 \\ 0 & |y| < 2, \end{cases}$$ [1)]

zodat

$$\mathcal{E}|\underline{x}| = c \int_{2}^{\infty} \frac{dy}{y \log y} = c \left[\log\log y \right]_2^{\infty} = \infty.$$

De karakteristieke functie

$$\phi_{\underline{x}}(t) = c \int_{|y| \geq 2} \frac{e^{ity}}{y^2 \log|y|} dy$$

is echter continu differentieerbaar, omdat

$$ic \int_{|y| \geq 2} \frac{e^{ity}}{y \log|y|} dy$$

1) Dat $f(x)=0$ is voor $|x| < 2$ is niet essentieel.

uniform convergent is, immers:

$$i\int_{|x|\geq 2} \frac{e^{ity}}{y\log y}\,dy = i\int_2^\infty \frac{e^{ity}}{y\log y} - i\int_2^\infty \frac{e^{-ity}}{y\log y} = -2\int_2^\infty \frac{\sin yt}{y\log y}\,dy.$$

Op grond van de tweede middelwaardestelling van de integraalrekening geldt

$$\left|\int_{M_1}^{M_2} \frac{\sin yt}{y\log y}\,dy\right| = \left|\frac{1}{\log M_1}\int_{M_1}^{\xi} \frac{\sin yt}{y}\,dy + \frac{1}{\log M_2}\int_{\xi}^{M_2} \frac{\sin yt}{y}\,dy\right| \leq \frac{1}{-\log M_1}\left\{\left|\int_{M_1}^{\xi} \frac{\sin yt}{y}\,dy\right| + \left|\int_{\xi}^{M_2} \frac{\sin yt}{y}\,dy\right|\right\} = \frac{1}{\log M_1}\left\{\left|\int_{M_1 t}^{\xi t} \frac{\sin y}{y}\,dy\right| + \left|\int_{\xi t}^{M_2 t} \frac{\sin y}{y}\,dy\right|\right\} < \varepsilon$$

voor alle reële t, als M_1 voldoende groot is, want $\left|\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy\right|$ is uniform begrensd voor alle reële a en b. Dit kan men als volgt inzien: als $a \geq 1$ is, dan geldt

$$\left|\int_0^a \frac{\sin y}{y}\,dy\right| \leq \left|\int_0^1 \frac{\sin y}{y}\,dy\right| + \left|\int_1^a \frac{\sin y}{y}\,dy\right| \leq 1 + \left|\int_1^a \frac{\sin y}{y}\,dy\right|.$$

Op grond van de tweede middelwaarde stelling van de integraalrekening geldt

$$\left|\int_1^a \frac{\sin y}{y}\,dy\right| \leq \left|\int_1^\eta \sin y\,dy\right| + \frac{1}{a}\left|\int_\eta^a \sin y\,dy\right| \leq 4.$$

Als $0 \leq a < 1$, dan geldt triviaal

$$\left|\int_0^a \frac{\sin y}{y}\,dy\right| \leq 1.$$

St. 1.1.3: a) als $\mathcal{E}|\underline{x}|^n < \infty$ is, dan geldt

$$\phi_{\underline{x}}(t) = 1 + \frac{it}{1!}\mathcal{E}\underline{x} + \ldots + \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{E}\underline{x}^{n-1} + \theta(t)\frac{t^n}{n!}\mathcal{E}|\underline{x}|^n \quad \text{met } |\theta(t)| \leq 1.$$

b) als $\mathcal{E}|\underline{x}|^{n+\delta} < \infty$ is voor een δ met $0 \leq \delta < 1$, dan geldt

$$\phi_{\underline{x}}(t) = 1 + \frac{it}{1!}\underline{x} + \ldots + \frac{(it)^n}{n!}\mathcal{E}\underline{x}^n + o(t^{n+\delta}) \quad (t \to \infty).$$

Bewijs: voor een functie f(t), die n maal differentieerbaar is, met continue $f^{(n)}(t)$, geldt

$$(*) \qquad f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}t+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\int_0^t f^{(n)}(s)\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds.$$

Als we (*) toepassen op $\phi_{\underline{x}}(t)$, dan vinden we

$$\phi_{\underline{x}}(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!}\mathcal{E}\,\underline{x}^k + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds \int_{-\infty}^{\infty}(iy)^n e^{isy}\,dF_{\underline{x}}(y).$$

Daar $\left|\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds \int_{-\infty}^{\infty}(iy)^n e^{isy}\,dF_x(y)\right| \le \int_0^{|t|}\frac{(|t|-s)^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{E}|\underline{x}|^n = \frac{|t|^n}{n!}\mathcal{E}|x|^n$

is, geldt a).

Om b) te bewijzen schrijven we

$$\phi_{\underline{x}}(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}\mathcal{E}\,\underline{x}^k + \int_0^t \{\phi_{\underline{x}}^{(n)}(s) - \phi_{\underline{x}}^{(n)}(0)\}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds.$$

Voor positieve t (en analoog voor negatieve t) geldt (met s=ut)

$$\left|t^{-(n+\delta)}\int_0^t\{\phi_{\underline{x}}^{(n)}(s)-\phi_{\underline{x}}^{(n)}(0)\}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds\right| \le \int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|1-e^{ituy}|}{|yt|^{\delta}}|y|^{n+\delta}\,dF_{\underline{x}}(y).$$

De laatste integraal gaat naar nul voor $t\to 0$ wegens gemajoreerde convergentie:

$$\frac{|1-e^{ituy}|}{|yt|^{\delta}} \le 2^{1-\delta}u^{\delta}.$$

<u>St. 1.1.5</u>: als $\phi_{\underline{x}}(t) = 1 + o(t^2)$ dan is $P\{\underline{x} = 0\} = 1$.

Bewijs: $$\frac{1-\phi_{\underline{x}}(t)}{t^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos ty}{t^2}\,dF_{\underline{x}}(y) - i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ty}{t^2}\,dF_{\underline{x}}(y) = o(1),$$

dus $$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos ty}{t^2}\,dF_{\underline{x}}(y)=0$$ en, omdat $\frac{1-\cos ty}{t^2} \ge 0$,

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1-\cos ty}{t^2}\,dF_{\underline{x}}(y) = \int_{-\alpha}^{\alpha}y^2\,dF_{\underline{x}}(y) = 0 \text{ voor alle positieve } \alpha.$$

Dus ook $\int_{-\infty}^{\infty}y^2\,dF_{\underline{x}}(y) = 0$, zodat $P\{\underline{x} = 0\}=1$.

St. 1.1.6: als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ 0.0. stochastische vectoren zijn, dan geldt

$$\phi_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = \phi_{\underline{x}}(t)\phi_{\underline{y}}(t).$$

Bewijs: $\mathcal{E}e^{it(\underline{x}+\underline{y})} = \mathcal{E}e^{it\underline{x}}\,\mathcal{E}e^{it\underline{y}}$ (zie st. 3.3.3 en 3.4.5 van rapport S 295).

Een gevolg van deze stelling is

St. 1.1.7: als $\phi_{\underline{x}_1}(t)$ en $\phi_{\underline{x}_2}(t)$ karakteristieke functies zijn, dan is ook $\phi_{\underline{x}_1}(t)\phi_{\underline{x}_2}(t)$ een karakteristieke functie.

Bewijs: als we op $R^2=(R_1,R_2)$ de productmaat $\mu_1\times\mu_2$ invoeren, die wordt voortgebracht door $F_{\underline{x}_1}(y_1)F_{\underline{x}_2}(y_2)$, dan zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ 0.0. op de maatruimte $(R^2, B^2, \mu_1\times\mu_2)$.

Opm.: St. 1.1.6 en 1.1.7 gevolg gelden ook, als $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ n-dimensionale vectoren zijn.
Verder geldt: als $\underline{x}$ een m-dimensionale vector is en $\underline{y}$ een n-dimensionale vector, terwijl $\underline{x}$ en $\underline{y}$ 0.0. zijn, dan is $\phi_{\underline{x},\underline{y}}(s,t) = \phi_{\underline{x}}(s).\ \phi_{\underline{y}}(t)$.

1.2 Analytische karakteristieke functies

Def. 1.2.1: $\phi_{\underline{x}}(t)$ heet een analytische karakteristieke functie, als er een functie $\phi(z)$ bestaat, die analytisch is voor $|z| < \alpha$ $(\alpha > 0)$, terwijl $\phi(t)= \phi_{\underline{x}}(t)$ voor $|t|<\alpha$, dus als $\phi_{\underline{x}}(t)$ analytisch kan worden voortgezet tot een omgeving van $z=0$.

De functie $\phi(z)$ geven we verder aan met $\phi_{\underline{x}}(z)$.

St. 1.2.1: zij $z=u+iv$ (u en v reëel) en zij $\underline{x}$ een stochastische variabele, waarbij $\mathcal{E}e^{v\underline{x}}$ bestaat voor alle v met $|v| < \alpha$ $(\alpha>0)$, dan is $\mathcal{E}e^{iz\underline{x}}$ de analytische voortzetting van $\phi_{\underline{x}}(t)$ in de strook $|v| < \alpha$.

Omgekeerd: als $\phi_{\underline{x}}(t)$ analytisch kan worden voortgezet tot $|z| < \alpha$, dan bestaat $\mathcal{E}e^{v\underline{x}}$ voor alle v met $|v| < \alpha$.

Bewijs: als $\mathcal{E}e^{v\underline{x}}$ bestaat voor $|v|=|\text{Im } z|<\alpha$ dan bestaat ook $\mathcal{E}e^{|v\underline{x}|} \leq \mathcal{E}(e^{v\underline{x}}+e^{-v\underline{x}})$ voor $|v| < \alpha$. Bij iedere vaste v bestaat een δ zodanig, dat ook $\mathcal{E}e^{(|v|+\delta)|\underline{x}|} < \infty$ (als $|v| < \alpha$, dan is ook $|v|+\delta<\alpha$ voor zekere δ). Voor iedere z met $|\text{Re}z|<\alpha$ geldt dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} |iye^{izy}| dF_{\underline{x}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{vy} dF_{\underline{x}}(y) \leq \int e^{(|v|+\delta)|y|} dF_{\underline{x}}(y) < \infty,$$

zodat $\mathcal{E}e^{i\underline{x}z}$ differentieerbaar is (zie rap. S295 , I17, blz. 126) met

$$\frac{d}{dz}\,\mathcal{E}e^{i\underline{x}z} = i\int_{-\infty}^{\infty} ye^{izy} dF_{\underline{x}}(y).$$

Het differentiaalquotient hangt niet af van de differentiatierichting (dit geldt immers voor de differentiatie van de integrand), dus $\mathcal{E}e^{i\underline{x}z}$ is een analytische functie in de strook $|v| < \alpha$, terwijl $\mathcal{E}e^{i\underline{x}t}=\phi_{\underline{x}}(t)$ voor alle reële t.

Als $\phi_{\underline{x}}(t)$ een analytische karakteristieke functie is, dan is $\phi_{\underline{x}}(t)$ willekeurig vaak differentieerbaar, zodat volgens st. 1.1.3 $\underline{x}^{2m}$ bestaat voor m=0,1,2,... . De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{\underline{x}}^{(n)}(0)\,\frac{z^n}{n!}$ is absoluut convergent voor $|z| < \alpha$, dus

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{\mathcal{E}\underline{x}^{2m}}{(2m)!}\, v^{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{M} \frac{(vy)^{2m}}{(2m)!}\, dF_{\underline{x}}(y) = \sum_{m=0}^{M} \frac{v^{2m}}{(2m)!} |\phi_{\underline{x}}^{(2m)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|v|^k}{k!} |\phi_{\underline{x}}^{k}(0)| < \infty,$$

zodat $\frac{e^{vy}+e^{-vy}}{2}$ op grond van de stelling van Lebesgue (zie S295, blz. 123) $F_{\underline{x}}$-sommeerbaar is en dus is $\mathcal{E}|e^{v\underline{x}}| < \infty$ voor $|v| < \alpha$.

typ: H.v.D.

St. 1.2.2: $\phi_{\underline{x}}(t)$ kan dan en slechts dan analytisch worden voortgezet tot $|\mathrm{Im}\, z| < \alpha$ $(\alpha > 0)$ als $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}\underline{x}^n}{n!} z^m$ absoluut convergent is voor $|z| < \alpha$.

Bewijs: Als voor vaste z met $|z| < \alpha$ is $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\mathcal{E}\underline{x}^n}{n!} z^n\right| < \infty$ is, dan is $\sum_{m=0}^{M} \frac{\mathcal{E}\underline{x}^{2m}}{(2m)!} |z|^{2m}$ begrensd is voor alle M. Uit het bewijs van de vorige stelling volgt, dat $\mathcal{E}|e^{v\underline{x}}| \leq \mathcal{E}e^{|v\underline{x}|} < \infty$ is. Uit de stelling zelf volgt dan, dat $\mathcal{E}\, e^{i\underline{x}z}$ de analytische voortzetting is van $\phi_{\underline{x}}(t)$ voor $|v| = |\mathrm{Im} z| < \alpha$.

Is $\phi_{\underline{x}}(z)$ de analytische voortzetting van $\phi_{\underline{x}}(t)$ voor $|\mathrm{Im} z| < \alpha$, dan is

$$\phi_{\underline{x}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \phi_{\underline{x}}^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}\underline{x}^n \frac{(iz)^n}{n!}$$

absoluut convergent voor $|z| < \alpha$.

Opm. 1: uit de beide voorgaande stellingen en hun bewijzen volgt, dat, als $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}\underline{x}^n}{n!} z^n$ convergent is voor $|z| < \alpha$, ook $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}|\underline{x}|^n}{n!} z^n$ convergeert voor $|z| < \alpha$ (het omgekeerde is triviaal), immers voor convergentie van beide reeksen is het bestaan van $\mathcal{E}e^{v\underline{x}}$ voor alle $|v| < \alpha$ en dus het bestaan van $\mathcal{E}e^{|v\underline{x}|}$ noodzakelijk en voldoende. Beide reeksen hebben dus de zelfde convergentiestraal.

Opm. 2: zoals we later zullen bewijzen is een verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}$ bepaald door zijn karakteristieke functie $\phi_{\underline{x}}$. Als $\phi_{\underline{x}}$ analytisch is, dan is $\phi_{\underline{x}}$ (als machtreeks) bepaald door de momenten van $\underline{x}$. In dat geval is dus ook $F_{\underline{x}}$ door de momenten bepaald.

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde hiervoor is, dat

a) alle momenten van $\underline{x}$ bestaan

b) $\Sigma \frac{\mathcal{E}\underline{x}^n}{n!} z^n$ een positieve convergentiestraal heeft, d.w.z.,

dat

$$\frac{1}{\alpha} \overset{\text{def}}{=} \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{|\mathcal{E}\underline{x}^n|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Een voorbeeld van een verdeling, waarbij deze convergentiestraal nul is wordt gegeven door de verdelingsdichtheid

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, e^{-\sqrt{x}} \quad (x>0).$$

Voor de momenten van deze verdeling geldt

$$\mathcal{E}\,\underline{x}^n = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty y^{2n+1}e^{-y}dy = (2n+1)! > (n!)^2,$$

zodat $\frac{1}{\alpha} \geq \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2}n)^{\frac{1}{2}} = \infty,$

omdat $n! \geq (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$ is. De karakteristieke functie

$$\phi(t) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{itx-\sqrt{x}}dx$$

is niet analytisch in de omgeving van t=0, immers $|\mathcal{E}e^{i\underline{x}z}|=\infty$ voor alle z met Im z < 0.

Men verifieert gemakkelijk, dat de stochastische variabele $\underline{x}$ met verdelingsdichtheid

$$f_{\underline{x}}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mu \text{ en } \sigma \text{ reëel})$$

de karakteristieke functie

$$\phi_{\underline{x}}(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$$

heeft. Uit de volgende stelling blijkt, dat dit de enige karakteristieke functie is van een dergelijke gedaante, n.l.

Stelling 1.2.3 (Stelling van Marcinkiewitz): als $\phi_{\underline{x}}(z)$ een karakteristieke functie is van de gedaante

$$\phi_{\underline{x}}(z) = e^{P(z)},$$

waarin P(z) een polynoom is, dan heeft P(z) de vorm

$$P(z) = i\mu z - \frac{\sigma^2}{2}z^2 \quad (\mu \text{ en } \sigma \text{ reëel}).$$

bewijs: zij

$$P(z) = \alpha_n z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0$$

met

$$\alpha_n = \alpha e^{i\beta}\neq 0 \quad (n \geq 1)$$

Daar $e^{p(0)}=1$ is, kunnen we zonder bezwaar

$$\alpha_0 = 0$$

nemen. Het triviale geval $P(z)\equiv 0$, dus $\phi_{\underline{x}}(z)\equiv 1$ sluiten we uit.
Voor willekeurige $z=u+iv$ geldt

$$e^{\mathrm{Re}P(z)}=|\phi(z)|\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iyz}|dF(y)= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yv}dF(y)= \phi(iv)=e^{P(iv)}.$$

Voor alle z geldt dus

(1.2.1) $$\mathrm{Re}P(z) \leq P(iv)= \mathrm{Re}P(iv).$$

We schrijven

$$P(z)=\alpha_n \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)=\alpha e^{i\beta}\prod_{j=1}^{n}|z-z_j|\exp i\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z),$$

met

(1.2.2) $$\psi_j(z) = \arg(z-z_j).$$

Is nu voor een vaste $\psi\neq 0$

(1.2.3) $$z=re^{i\psi},$$

dan volgt uit (1.2.1)

(1.2.4) $$|\alpha|\prod_{j=1}^{n}|z-z_j|\cos\{\beta+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)\}\leq|\alpha|\prod_{j=1}^{n}|iv-z_j|\cos\{\beta+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(iv)\},$$

waarin voor $|z|=r\to\infty$

$$\frac{|z-z_j|}{r}\to 1,\ \psi_j(z)\to\psi,\ \frac{|iv-z_j|}{r}\to\frac{|v|}{|z|}=|\sin\psi|$$

en

$$\cos\{\beta+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(iv)\}\to\cos(\beta+n\ \mathrm{arg}iv)=\left(\frac{\sin\psi}{|\sin\psi|}\right)^n\cos(\beta+\frac{n\pi}{2}).$$

Deling van beide leden van (1.2.4) door r^n gevolgd door de limiet overgang $r \to \infty$ levert dus

$$\cos(\beta+n\psi) \leq (\sin\psi)^n \cos\left(\beta+\frac{n\pi}{2}\right). \tag{1.2.5}$$

Op grond van de continuiteit van de betrokken functies geldt (1.2.5) ook nog voor $\psi=0$.
Nemen we speciaal

$$\beta+n\psi=2\pi$$

dan levert (1.2.5)

$$\left\{\sin\left(\frac{2\pi-\beta}{n}\right)\right\}^n \cos\left(\beta+\frac{n\pi}{2}\right) = 1.$$

Nu is $\left|\cos\left(+\frac{n\pi}{2}\right)\right|=1$, alleen als $\beta=l\pi-\frac{n\pi}{2}$ (l geheel). Omdat $\phi_{\underline{x}}$ invariant is bij vervangen van β door $\beta+2k\pi$ (k geheel), is het voldoende, om alleen de waarden $l=0$ en $l=1$ te beschouwen.

Voor $l=0$ is $\cos\left(\beta+\frac{n\pi}{2}\right)= +1$ en dus moet gelden

$$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}^n = 1.$$

Dit is alleen juist voor $n=1$ en $n=2$.

Voor $l=1$ is $\cos\left(\beta+\frac{n\pi}{2}\right)= -1$ en dus moet

$$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)\right\}^n = -1$$

zijn. Dit is alleen waar voor $n=1$. De enige mogelijkheden zijn dus $n=1$ en $n=2$.

Als $n=2$ is, dan volgt uit

$$\mathcal{E} e^{iz\underline{x}} = e^{\alpha_1 z+\alpha_2 z^2}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = i\,\mathcal{E}\underline{x} = i\mu \\ 2\alpha_2 = -(\mathcal{E}\underline{x}^2-(\mathcal{E}\underline{x})^2) = -\sigma^2, \end{cases}$$

zodat

$$\phi_{\underline{x}}(z) = e^{i\mu z-\frac{\sigma^2}{2}z^2}.$$

Het geval n=1 krijgen we hieruit door $\sigma^2=0$ te nemen.

Stelling 1.2.4 (Stelling van Cramér): als $\phi_1(t)$ en $\phi_2(t)$ karakteristieke functies zijn, terwijl

$$\phi_1(t)\ \phi_2(t)= e^{i\mu t-\frac{\sigma^2}{2}t^2},$$

dan geldt

$$\phi_j(t)= e^{i\mu_j t-\frac{\sigma_j^2}{2}t^2} \qquad (j=1,2)$$

bewijs: $\phi_1(t)\ \phi_2(t)$ is de karakteristieke functie van $\underline{x}=\underline{x}_1+\underline{x}_2$ met $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ O.O. Voor de centrale momenten van $\underline{x}$ geldt

$$\mathcal{E}(\underline{x}-\mu)^{2n}=(-)^n\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{2n} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}\right]_{t=0}=\frac{(2n)!}{2^n n!}\ \sigma^{2n},$$

dus $e^{c^2(\underline{x}-\mu)^2}<\infty$ voor $c^2<\frac{1}{2\sigma^2}$ op grond van de stelling van Lebesgue, omdat

$$\mathcal{E}\sum_{n=0}^{N}\frac{\{c(\underline{x}-\mu)\}^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}(c\sigma)^{2n}$$

begrensd is voor $c^2<\frac{1}{2\sigma^2}$. Immers

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^n\right|=|(1-z)^{-\frac{1}{2}}|<\infty \qquad (|z|<1).$$

Omdat voor positieve a en b en reële x

$$e^{ax^2}>e^{b|x|} \text{ voor voldoende grote } |x|,$$

is ook

$$\mathcal{E}e^{c^2\underline{x}^2}<\infty \qquad (c^2<\frac{1}{2\sigma^2}).$$

Op grond van de stelling van Fubini (S 295, St. 2.3.3) is dan voor $\mu_{\underline{x}_2}$ - bijna alle x_2

$$\mathcal{E}e^{c^2(\underline{x}_1+x_2)^2}<\infty$$

en dus geldt

$$\mathcal{E} e^{c^2 \underline{x}_1^2} < \infty \quad (c^2 < \frac{1}{2\sigma^2})$$

en analoog voor $\underline{x}_2$. Voor iedere eindige reële v en voor voldoende grote x_1 is

$$e^{|vx_1|} \leq e^{c^2 x_1^2}$$

dus

$$\mathcal{E} e^{|v\underline{x}_1|} < \infty,$$

waaruit op grond van St. 1.2.1 en St. 1.2.2 volgt, dat $\phi_1(z) = \phi_{\underline{x}_1}(z)$ analytisch[1] is voor alle eindige en evenzo voor $\phi_{\underline{x}_2}(z)$. Daar ϕ_j geen eindige nulpunten heeft: $\phi_1(z)\phi_2(z) \neq 0$ en $|\phi_j(z)| < \infty$ voor $|z| < \infty$, is ook $\log \phi_j(z)$ analytisch voor eindige z. Omdat voor alle reële y

$$yx_j \leq c^2 x_j^2 + \frac{y^2}{4c^2}$$

geldt, is voor $|z|^2 < \frac{1}{2\sigma^2}$

$$\log |\phi_j(z)| \leq \log \mathcal{E} e^{|zx_j|} \leq \log \mathcal{E} e^{c^2 \underline{x}_j^2 + \frac{|z|^2}{4c^2}} =$$

$$= \frac{|z|^2}{4c^2} + \log \mathcal{E} e^{c^2 \underline{x}_j^2} \quad (j=1,2),$$

dus

$$\log \phi_j(z) = O(z^2) \quad (z \to \infty).$$

Nu geldt algemeen: als f(z) analytisch is voor alle eindige z en $f(z) = O(z^k)$ $(k \to \infty)$, dan is $f(z) = \sum_{n=1}^{k} c_n z^n$, immers

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = O(R^{k-n}),$$

zodat bij limietovergang $R \to \infty$ blijkt, dat $c_n = 0$ is voor $n > k$.

We vinden nu dus

$$\log \phi_j(z) = c_{0j} + c_{1j} z + c_{2j} z^2 \quad (j=1,2).$$

---

[1] Met het begrip "analytisch" worden hier (evenals in het voorgaande) alle singulariteiten, dus ook polen uitgesloten.

Evenals in het bewijs van St. 1.2.3 verifieert men gemakkelijk, dat

$$\begin{cases} c_{0j}=0 \pmod{2\pi i} \\ c_{1j}=i\mu_j \\ c_{2j}=-\frac{1}{2}\sigma_j^2. \end{cases}$$

Opm.: bovenstaand bewijs gaat formeel door voor $\sigma^2=0$, als ∞ wordt gelezen voor $\frac{1}{\sigma^2}$. We kunnen dit geval afzonderlijk behandelen, door op te merken, dat uit $\sigma^2=0$ volgt, dat $\sigma_j^2=0$ $(j=1,2)$, omdat $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$. Nu is dus $P\{\underline{x}_j=\mu_j\}=1$ en $\phi_j(t)=e^{i\mu_j t}$.

1.3 Omkeerstellingen

We voeren de volgende notatie in

Def. 1.3.1: $$F^*(x)=\frac{F_+(x)+F_-(x)}{2}$$ [1]

$$\hat{F}(x)=F_+(x)+F_-(x)-1=2F^*(x)-1.$$

We zullen gebruik maken van het bekende

Lemma 1.3.1: $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin xt}{t}\,dt=\pi\,\mathrm{sgn}\,x.$$

We gebruiken verder

Lemma 1.3.2: $$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(a-x)\,dF(x)=\hat{F}(a),$$

waarvan het bewijs onmiddelijk uit Def. 1.3.1 volgt.

We bewijzen nu

St. 1.3.1 (omkeerstelling volgens Gurland): als $\phi(t)$ de karakteristieke functie is bij $F(x)$ [2] dan geldt

---

1) $F_+(x)=\lim_{\delta\downarrow 0}F(x+\delta)=F(x)$, $F_-(x)=\lim_{\delta\downarrow 0}F(x-\delta)$.

2) We zullen in het volgende zonder dit steeds expliciet vermelden met $F(x)$ een verdelingsfunctie en met $\phi(t)$ de corresponderende karakteristieke functie aanduiden.

$$\hat{F}(x)= \lim_{\substack{T\to\infty \\ \tau\downarrow 0}} \int_{\tau\le|t|\le T} \frac{e^{-itx}}{-\pi it}\phi(t)dt.$$

bewijs: $$\int_{\tau\le|t|\le T} \frac{e^{-itx}}{-\pi it}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}dF(y)= -\int_{-\infty}^{\infty} dF(y) \int_{\tau\le|t|\le T} \frac{e^{it(y-x)}}{\pi it}\,dt=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF(y) \int_{\tau\le|t|\le T} \frac{\sin(x-y)t}{\pi t}\,dt \to \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-y)dF(y)= \hat{F}(x),$$

omdat

$$\int_{\tau\le|t|\le T} \frac{\sin(x-y)t}{\pi t}\,dt \quad \text{gemajoreerd (zie Opm. op blz 5 en 6)}$$

naar sgn (x-y) convergeert.

met Def. 1.3.1 volgt uit St. 1.3.1 direct

St. 1.3.2 (omkeerstelling volgens Lévy):

$$F^*(x)-F^*(y)= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{2\pi it}\,\phi(t)dt.$$

Omdat de integrand nu continu is voor t=0, hoeft bij t=0 geen hoofdwaarde te worden genomen.

Eveneens ui St. 1.3.1 volgt

St. 1.3.3 (omkeerstelling volgens Parzen):

$$F^*(x)= \tfrac{1}{2}- \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{T} \frac{\operatorname{Im}\{e^{-itx}\phi(t)\}}{t}\,dt$$

bewijs: $$\hat{F}(x)= 2F^*(x)-1= \operatorname{Re}\{2F^*(x)-1\}=-\frac{1}{\pi} \lim_{\substack{T\to\infty \\ \tau\downarrow 0}} \int_{\tau\le|t|\le T} \frac{\operatorname{Im}\{e^{-itx}\phi(t)\}}{t}dt.$$

Daar $\dfrac{\operatorname{Im}\, e^{-itx}\phi(t)}{t} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t(y-x)}{t}dF(y)$ even is (en continu voor t=0),

volgt hieruit de stelling.

Opm: uit de omkeerstellingen volgt, dat F(x) in zijn continuiteitspunten door $\phi(t)$ bepaald is. Op grond van de continuiteit van rechts is F(x) dan in ieder punt door $\phi(t)$ bepaald. De correspondentie tussen

verdelingsfuncties en hun karakteristieke functies is dus <u>één-een-duidig</u>.

<u>St. 1.3.4:</u> de sprong van F in het punt x wordt gegeven door

$$F_+(x)-F_-(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx}\phi(t)dt.$$

bewijs: $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx}\phi(t)dt = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} dF(y) \int_{-T}^{T} e^{it(y-x)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin yT}{yT} dF(x+y) \to$

$\to F_+(x)-F_-(x)$, omdat $\frac{\sin yT}{yT}$ gemajoreerd convergeert naar g(y) met

$$g(y) = \begin{cases} 0 & y\neq 0 \\ 1 & y=0 \end{cases}.$$

Als $\underline{x}$ een speciale rooster variabele is met

$$(1.3.1) \qquad P\{\underline{x}=k\} = p_k, \ \sum_{-\infty}^{\infty} p_k = 1,$$

dan is de karakteristieke functie

$$(1.3.2) \qquad \phi_{\underline{x}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itk}$$

periodiek modulo 2π. Uit St. 1.3.4 volgt dan met $T=n\pi$

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} \phi_{\underline{x}}(t)dt,$$

d.w.z. p_k is de k^{de} Fourier-coëfficient van $\phi_{\underline{x}}$, in overeenstemming met (1.3.2).

Iedere algemene rooster variabele $\underline{y}$ kan geschreven worden als

$$\underline{y}=a+b\underline{x},$$

waarin $\underline{x}$ aan (1.3.1) voldoet.

Zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ 0.0 en isomoir ($F_{\underline{x}_1}=F_{\underline{x}_2}$) met sprongen ter grootte p_k in y_k, dan wordt de karakteristieke functie van

$$\underline{x}=\underline{x}_1-\underline{x}_2$$

gegeven door

$$\phi_{\underline{x}}(t)=\mathcal{E}e^{it\underline{x}_1}\,\mathcal{E}e^{-it\underline{x}_2}=\mathcal{E}e^{it\underline{x}_1}\,\mathcal{E}e^{-it\underline{x}_1}|\phi_{\underline{x}_1}(t)|^2.$$

Voor de sprong van $F_{\underline{x}}(y)$ in y=0 geldt nu

$$P\{\underline{x}=0\}=\Sigma P\{\underline{x}_1=y_k,\ \underline{x}_2=y_k\}=\Sigma p_k^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi_{\underline{x}_1}(t)|^2\,dt.$$

We vinden dus

St. 1.3.5: F(x) is dan en slechts dan continu, als geldt

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\phi(t)|^2dt=0.$$

Equivalent met St. 1.3.5 geldt

(1.3.3) $$\int_{0}^{T}|\phi(t)|^2dt=o(T)\Longleftrightarrow F(x)\text{ is continu.}$$

Uit de ongelijkheid van Schwarz volgt

$$\left(\int_0^T|\phi(t)|dt\right)^2\le\int_0^T dt.\int_0^T|\phi(t)|^2dt=o(T^2),$$

dus

(1.3.4) $$\int_0^T|\phi(t)|dt=O(T)\Longleftrightarrow\int_0^T|\phi(t)|^2dt=o(T)\Longleftrightarrow F(x)\text{ is continu.}$$

Als $$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|dt<\infty,$$

is F(x) continu en dan volgt uit St. 1.3.2

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,\frac{(1-e^{-ith})}{ith}\,\phi(t)dt.$$

Op grond van gemajoreerde convergentie bestaat de limiet voor $h \to 0$ in het rechterlid en dus ook in het linkerlid:

$$(1.3.5) \qquad f(x) \overset{\text{def}}{=} F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, \phi(t)dt.$$

Men controleert gemakkelijk, dat $f(x)$ uniform continu is op $(-\infty,\infty)$.

We hebben dus

St. 1.3.6: als

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|dt < \infty$$

is, dan is $F(x)$ absoluut continu. $F(x)$ heeft zelfs een uniform continu afgeleide, die gegeven wordt door (1.3.5).

Uit het voorgaande volgt, dat, als $F(x)$ absoluut continu is,

$$(1.3.6) \qquad \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

Uit de symmetrie, die tussen de relaties (1.3.5) en (1.3.6) bestaat, volgt, dat het verband tussen de existentie van de momenten van $\underline{x}$ (d.w.z. het gedrag in $\pm\infty$ van $F(x)$ en $f(x)$ en de differentieerbaarheid van $\phi_{\underline{x}}(t)$ omkeerbaar is, b.v.: als

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^k\, |\phi(t)|dt < \infty$$

is, dan bestaat $f^{(k)}(x)$ en is uniform continu op $(-\infty,\infty)$.

Uit (1.3.4) volgt

$$(1.3.7) \qquad \lim_{t\to\infty} \phi(t)=0 \Longrightarrow F(x) \text{ is continu.}$$

Uit (1.3.6) volgt met behulp van het Lemma van Riemann-Lebesgue

$$(1.3.8) \qquad F(x) \text{ is absoluut continu} \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \phi(t)=0.$$

Uit de voorbeelden, die in 1.5 worden besproken blijkt (1.3.7) en (1.3.8) niet omkeerbaar te zijn.

Zonder bewijs vermelden we

St. 1.3.7: $\phi(t)$ is dan en slechts dan de karakteristieke functie van een absoluut continue verdelingsfunctie, als er een complexe functie $g(u)$ bestaat met de eigenschappen

$$a)\quad \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t+u)\,\overline{g(u)}\,du$$

$$b)\quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = 1.$$

Het bewijs van St. 1.3.7 berust op de stelling van Parseval uit de Fourier-theorie. Als $f(x)$ de verdelingsdichtheid bij $F(x)$ is, dan is $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\sqrt{f(x)}\,dx$.

1.4. Limieten van verdelingsfuncties

Def. 1.4.1: een functie $Q(x)$ heet een quasi-verdelingsfunctie, als geldt

1) $Q(x)$ is niet dalend
2) $Q(x)$ is continu van rechts
3) $0 \leq Q(x) \leq 1$

Als bovendien $Q(\infty)-Q(-\infty)=1$ is, dan is $Q(x)$ een verdelingsfunctie.

Def. 1.4.2: de rij verdelingsfuncties $F_n(x)$ heet zwak convergent, als er quasi-verdelingsfunctie $Q(x)$ bestaat, zodanig, dat

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=Q(x) \text{ voor alle continuiteitspunten van } Q(x).$$

We schrijven dan

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} F_n(x)=Q(x).$$

Dat $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ (als deze bestaat) geen verdelingsfunctie hoeft te zijn, blijkt uit de volgende voorbeelden:

Als

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{als } x<-n \\ \frac{n+x}{2n} & \text{als } |x|\leq n \\ 1 & \text{als } x>n \end{cases}$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \tfrac{1}{2} \quad \text{voor alle } x,$$

dus

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} F_n(x) < 1.$$

Ook is $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ niet noodzakelijk continu van rechts, bijv.:

$$(1.4.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{nx} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}.$$

Wel geldt

<u>Lemma 1.4.1</u> als voor een rij verdelingsfuncties $\{F_n(x)\}$ $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ bestaat voor alle x in een verzameling D, die dicht ligt in de reële getallen, dan is er een quasi-verdelingsfunctie Q(x) met $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} F_n(x) = Q(x)$.

bewijs: zij

$$Q^*(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \quad (\text{voor } x\in D)$$

$$Q^*(x) = \lim_{\substack{y\downarrow x \\ y\in D}} Q^*(y) \quad (\text{voor } x\notin D),$$

dan is Q^* niet-dalend en $0\leq Q^*\leq 1$. Voor $x'\leq x\leq x''$ met x' en x'' in D geldt

$$Q^*(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = Q^*(x'').$$

Voor een continuiteitspunt x van Q^* geldt dus $(x'\downarrow x,\ x''\uparrow x)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = Q^*(x).$$

De functie Q(x) gedefinieerd door

$$Q(x) = \lim_{y \downarrow x} Q^{*}(y)$$

voldoet aan de eisen van de stelling.

Uit Lemma 1.4.1 volgt

Lemma 1.4.2 (Stelling van Helly): iedere rij verdelingsfuncties $\{F_n(x)\}$ bevat een zwak convergente deelrij.

bewijs: Omdat $F_n(x)$ begrensd is, bevat de rij voor iedere vaste x en convergente deelrij. Op grond van de aftelbaarheid van de rationale getallen kan met behulp van de diagonaal-methode een deelrij $\{F_{n,n}(x)\}$ worden geconstrueerd, die convergeert voor alle rationale x. Omdat de rationale getallen dicht liggen in de reële getallen is Lemma 1.4.1 van toepassing op de rij $\{F_{n,n}(x)\}$.

Lemma 1.4.3 (Stelling van Helly-Bray): als g(x) continu is voor $a \leq x \leq b$ en $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=Q(x)$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)dF_n(x) = \int_a^b g(x)dQ(x).$$

bewijs: Zij $a=x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N=b$ en definieer

$$g_N(x) = g(x_k) \quad \text{als } x_k \leq x < x_{k+1} \quad (k=0,1,\ldots,N-1)$$

De punten $x_0,x_1,\ldots,x_N$ kunnen zo gekozen worden, dat voor een gegeven $\varepsilon > 0$

$$(1.4.1) \qquad |g_N(x)-g(x)| < \varepsilon \quad \text{voor alle } x \in [a,b],$$

terwijl bovendien $x_0,x_1,\ldots,x_N$ continuiteitspunten van Q(x) zijn. We kunnen dan n_0 zo groot kiezen, dat voor $k=0,1,\ldots,N$

$$(1.4.2) \qquad |F_n(x_k)-Q(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{N \max|g(x)|} \quad \text{voor } n \geq n_0.$$

Nu is voor $n \geq n_0$

$$\left|\int_a^b g\,dQ - \int_a^b g\,dF_n\right| \le \left|\int_a^b g\,dQ - \int_a^b g_N\,dQ\right| + \left|\int_a^b g_N\,dQ - \int_a^b g_N\,dF_n\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b g_N\,dF_n - \int_a^b g\,dF_n\right| = I_1+I_2+I_3 \le 2\varepsilon + I_2 \text{ op grond van (1.4.1).}$$

$$I_2 = \left|\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k)\{Q(x_{k+1})-Q(x_k)\} - \sum_{k=0}^{N} g(x_k)\{F_n(x_{k+1})-F_n(x_k)\}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N-1} |g(x_k)|\,|Q(x_{k+1})-F_n(x_{k+1})| + \sum_{k=0}^{N-1} |g(x_k)|\,|Q(x_k)-F_n(x_k)| \le 2\varepsilon$$

wegens (1.4.2).

Lemma 1.4.4: als $g(x)$ begrensd is en continu op $(-\infty,\infty)$ en $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$, terwijl F een verdelingsfunctie is, dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x).$$

bewijs: $\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF(x)\right| \le \left|\int_{-a}^{a} g(x)\,dF_n(x) - \int_{-a}^{a} g(x)\,dF(x)\right| +$

$+ \left|\int_{|x|>a} g(x)\,dF_n(x)\right| + \left|\int_{|x|>a} g(x)\,dF(x)\right| = J_1+J_2+J_3$, waarin

$J_2 \le M\{F_n(-a)+1-F_n(a)\}$ en $J_3 \le M\{F(-a)+1-F(a)\}$, als $M=\sup|g|$.

Nu is voor $|a| \ge a_0$ $F(-a)+1-F(a) < \varepsilon$. Als a_0 en $-a_0$ continuiteitspunten van F zijn, dan is voor $n \ge n_0$ $|F_n(-a_0)-F(-a_0)| < \varepsilon$ en $|F_n(a_0)-F(a_0)| < \varepsilon$. Wegens de monotonie van F_n is dan voor $n \ge n_0$ en $a \ge a_0$ $F_n(-a)+1-F_n(a) < 3\varepsilon$. Tenslotte is voor $n \ge n_1$ $J_1 < \varepsilon$ op grond van Lemma 1.4.3, dus voor $n \ge n_0+n_1$,

$$J_1+J_2+J_3 \le \varepsilon(4M+1).$$

Opm: als $g(x)=g(x,t)$ een functie is van de parameter t en g is uniform begrensd en uniform continu voor alle t in een interval I, dan is de convergentie in Lemma 1.4.4 uniform voor alle $t \in I$, zoals uit het bewijs van de Lemma's 1.4.3 en 1.4.4 blijkt.

St. 1.4.1: als $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ met $F(x)$ een verdelingsfunctie, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)=\phi(t) \quad \text{(alle reële } t\text{)},$$

en de convergentie op elk eindig interval $|t| \leq T$.

bewijs: de eerste bewering is een direct gevolg van Lemma 1.4.4. De uniforme convergentie volgt uit de uniforme continuiteit van e^{ity} voor $|t| \leq T$: $|e^{it(y+h)}-e^{ity}|=|1-e^{ith}| \leq T|h|$ (zie Opm. na Lemma 1.4.4).

St. 1.4.2:
$$-\int_{-h}^{0} F(x)dx+\int_{0}^{h} F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cosht}{t^2}\phi(t)dt.$$

bewijs: $-\int_{-h}^{0} F(x)dx+\int_{0}^{h} F(x)dx= -2\int_{-h}^{0} \hat{F}(x)dx+2\int_{-h}^{0} \hat{F}(x)dx$. De stelling volgt nu zonder veel moeite uit de omkeerstelling van Gurland (St. 1.3.1).

St. 1.4.3 (continuiteitsstelling): als $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)=\phi(t)$ voor alle reële t, terwijl $\phi(t)$ continu is voor $t=0$, dan is er een verdelingsfunctie $F(x)$ met

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

en $\phi(t)$ is de karakteristieke functie van $F(x)$.

bewijs: volgens Lemma 1.4.2 is er een deelrij $\{F_{n_k}\}$ met $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x)=F(x)$. Op grond van St. 1.4.2 geldt

$$(1.4.3) \qquad -\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} F_{n_k}(x)dx+\frac{1}{h}\int_{0}^{h} F_{n_k}(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cosht}{ht^2}\phi_{n_k}(t)dt.$$

Als we in (1.4.3) $k\to\infty$ laten gaan vinden we wegens gemajoreerde convergentie

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} F(x)dx+\frac{1}{h}\int_{0}^{h} F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cosht}{ht^2}\phi(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cost}{t^2}\phi(\tfrac{t}{h})dt.$$

Limietovergang ($h \to \infty$) levert op grond van de continuiteit van $\phi(t)$

voor $t=0$ $\left(-\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} F(x)dx+\frac{1}{h}\int_{0}^{\infty} F(x)dx \to -F(-\infty)+F(\infty)\right)$

$$-F(-\infty)+F(\infty)=\phi(0)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(0)=1.$$

$F(x)$ is dus een verdelingsfunctie. Op grond van St. 1.4.1 is $\phi(t)$ de karakteristieke functies van $F(x)$.

Iedere andere zwak-convergente deelrij van $\{F_n\}$ heeft dezelfde limiet, omdat de karakteristieke functie van de limietverdeling steeds $\phi(t)$ is, dus $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$.

Opm.: in plaats van de continuiteit van ϕ voor $t=0$ te eisen, kan men ook eisen, dat $\phi_n(t)$ in een omgeving van $t=0$ uniform convergeert: dit impliceert de continuiteit van ϕ voor $t=0$.
Uit de volgende twee voorbeelden blijkt, dat in St. 1.4.3 noch de continuiteit van $\phi(t)$ voor $t=0$, noch de convergentie van $\phi_n(t)$ voor alle reële t overbodig zijn:

1) Als $F_n(x)=\begin{cases}0 & x<-n\\ \frac{n+x}{2n} & |x|\le n\\ 1 & x>n\end{cases}$, dan is $\phi_n(t)=\frac{\sin nt}{nt}$ met

$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$. De limiet functie is niet continu in nul en dus geen karakteristieke functie. De rij verdelingsfuncties convergeert nu ook niet naar een verdelingsfunctie: $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\frac{1}{2}$.

2) $\phi_1(t)=\begin{cases}1-|t| & |t|\le 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$

en

$$\phi_2(t)=\tfrac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi t}{(2n+1)^2} \quad \text{(alle reële t)}$$

zijn karakteristieke functies, waarvoor geldt

$$\phi_1(t)=\phi_2(t) \qquad (|t|\le 1),$$

immers $\phi_2(t)$ is de Fourier-reeks van $\phi_1(t)$. De bijbehorende verdelingsfuncties zijn verschillend:

$$F_1(x)= \int_{-\infty}^{x} \frac{1-\cos u}{\pi u^2}\, du$$

$$F_2(x)= \tfrac{1}{2}\, \iota(x)+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} \{\iota(x+(2n+1)\pi)+\iota(x-(2n+1)\pi)\}.$$

1.5 Voorbeelden

We behandelen in deze paragraaf een aantal voorbeelden van karakteristieke functies van het volgende type:

$$\underline{x}_n= \begin{cases} -r_n & \text{met kans } \frac{1}{2} \\ r_n & \text{met kans } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

met $r_n > 0$. De karakteristieke functie wordt gegeven door

$$\phi_{\underline{x}_n}(t)= \cos r_n t.$$

We beschouwen convoluties van verdelingen van dit type en wel

$$(1.5.1) \qquad \phi(t)= \prod_{n=1}^{\infty} \cos r_n t.$$

Dit product convergeert uniform in elk eindig interval $|t| \leq T$ als

$$(1.5.2) \qquad \Sigma r_n^2 < \infty.$$

Immers $\log \cos r_n t = -(r_n t)^2 + o(r_n^2 t^2)$ $\quad F(r_n t_n \to 0)$ zodat $\sum_1^{\infty} \log \cos r_n t$ uniform convergeert en dus $\prod_1^{\infty} \cos r_n t$.

Wegens 1.5.2 is $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, zodat we een deelrij $\{r_{n_k}\}$ kunnen vinden, zodanig dat voor alle k

$$(1.5.3) \qquad r_{n_k} > \sum_{j=k+1}^{\infty} r_{n_j},$$

bijvoorbeeld

$$r_{n_1} = r_1$$

$$r_{n_{k+1}} = \max r_n \lfloor r_n < \tfrac{1}{2} r_{n_k} \rfloor \text{ .}$$

We beschouwen nu

$$\phi_1(t) \overset{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{\infty} \cos r_{n_k} t\text{.}$$

De verdelingsfunctie $F_{\underline{+}x_{n_1}+\ldots+\underline{+}x_{n_N}}$ heeft sprongen van de grootte 2^{-N} in $\sum_1^N \delta_k r_{n_k}$, waar $\delta_k = \underline{+}1$. De limietverdelingsfunctie $F_1(x)$ neemt toe in punten van de vorm $\sum_1^{\infty} \delta_k r_{n_k}$.

Op grond van (1.5.3) zijn $\sum_1^{\infty} \delta_k r_{n_k}$ en $\sum_1^{\infty} \delta_k' r_{n_k}$ verschillend, als niet voor alle k geldt $\delta_k = \delta_k'$. Hieruit volgt met het voorgaande, dat $F_1(x) = \lim_{N\to\infty} F_{\underline{+}x_{n_1}+\ldots+\underline{+}x_{n_N}}(x)$ in geen enkel punt positieve massa heeft, d.w.z., dat $F_1(x)$ continu is. Nu volgt uit (1.3.4) dat ook F(x) continu is, immers $|\phi(t)| \leq |\phi_1(t)|$, we hebben dus bewezen

<u>St. 1.5.1:</u> als $\sum_1^{\infty} r_n^2 < \infty$, dan is $\phi(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos r_n t$ de karakteristieke functie van een continue verdelingsfunctie.

Zonder bewijs vermelden we (zie A. Wintner "The Fourier Transforms of Probability Distributions")

<u>St. 1.5.2:</u> als $\phi_n(t)$ karakteristieke functies zijn van discrete stochastische variabelen en $\phi(t) = \prod_1^{\infty} \phi_n(t)$ is een karakteristieke functie, dan is de corresponderende verdelingsfunctie F(x) discreet, singulier of absoluut continu (dus geen mengsel van verschillende typen).

Alle verdelingen van het beschouwde type zijn dus of absoluut continu of singulier.

We beschouwen nu het geval

$$r_n = r^n \quad (0 < r < 1),$$

met

$$\phi_r(t) \overset{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \cos r^n t.$$

<u>St. 1.5.3:</u> voor $0 < r < \frac{1}{2}$ is de verdeling bij $\phi_r(t)$ singulier.

bewijs: de stochastische variabele neemt waarden in het interval $I_r \overset{\text{def}}{=} \left[-\frac{r}{1-r}, \frac{r}{1-r}\right]$ aan.

Er is geen massa in het interval $(-r+\frac{r^2}{1-r}, r-\frac{r^2}{1-r})$ met de lengte $2\frac{r-2r^2}{1-r}$, omdat $\sum_1^{\infty} \delta_k r^k$ niet in dit interval ligt. Om dezelfde reden is er geen massa in twee intervallen om $-r$ en r nu met lengte $2r\frac{r-2r^2}{1-r}$, etc. De lengte (d.w.z. de L-maat) van de som der intervallen, die geen massa bevatten is $2\frac{r-2r^2}{1-r}(1+2r+(2r)^2+\ldots) = \frac{2r}{1-r}$, juist de lengte van I_r. Alle massa van de verdeling ligt dus in een verzameling met L-maat nul, d.w.z. de verdeling is singulier.

Voor $r=\frac{1}{2}$ vinden we

$$\phi_{\frac{1}{2}}(t) = \prod_1^{\infty} \cos(\tfrac{1}{2})^n t = \frac{\sin t}{t}$$

met

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1+x}{2} \quad (|x| \leq 1).$$

Het is niet zo, dat F_r absoluut continu is voor alle r met $r \geq \frac{1}{2}$.
Tegenvoorbeeld: $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}62$. Nu voldoet r aan

$$\frac{1}{r} - r = 1$$

waaruit volgt, dat

$$(1.5.4) \qquad v_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{r^n} + (-r)^n$$

voldoet aan

$$v_{n+2} = v_{n+1}+v_n .$$

Men vindt $v_1=1$ en $v_2=3$ en dus $(v_1,v_2,\ldots)=(1,3,4,7,11,18,29,\ldots)$.

Nu geldt voor $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ wegens (1.5.4)

$$|\phi_r(\pi r^{-n})|=|\cos\pi\ \cos\pi r^{-1}\ldots\cos\pi r^{-(n-1)}\ \phi_r(\pi)|=|\phi_r(\pi)|\prod_{k=0}^{n-1}\cos\pi r^{-k}=$$

$$=|\phi_r(\pi)|\prod_{k=0}^{n-1}\cos\pi(v_k-(-r)^k)|=|\phi_r(\pi)|\prod_{k=0}^{n-1}|\cos r^k\pi|\to|\phi_r(\pi)|^2\neq 0$$

voor $n\to\infty$, omdat $\cos\pi r^n\neq 0$ voor de gegeven waarde van r en alle n, terwijl het oneindige product convergeert. Wegens (1.3.8) is F_r niet absoluut continu en dus wegens St. 1.5.2 singulier.

Dit tegenvoorbeeld geeft tevens een voorbeeld van een verdeling, waarbij F(x) continu is, terwijl niet $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=0$ (zie 1.3.7). Evenrediger voorbeelden van dit laatste worden geleverd door ϕ_r met $r=\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$.

We laten nu zien, dat $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=0$ niet impliceert, dat F(x) absoluut continu is (zie 1.3.8).

Zij $r=\frac{2}{5}$, dan is F_r singulier (St. 1.5.3) en

$$\phi_r(t(\tfrac{5}{2})^N) = \phi_r(t).\cos t\ \cos(\tfrac{5}{2})t.\ \ldots\cos(\tfrac{5}{2})^{N-1}t.$$

Stel dat $\lim_{N\to\infty}|\phi_r(t(\frac{5}{2})^N)|\neq 0$ is, dan moet gelden

$$\lim_{N\to\infty}\ |\cos(\tfrac{5}{2})^N t|=1,$$

dus

$$(\tfrac{5}{2})^N t = k_N\pi+\delta_N\ ,$$

met k_N geheel en $|\delta_N|<\delta$ voor $N>N_0(\delta)$. Het is nu duidelijk, dat de eis

$$\tfrac{5}{2}\ k_N\pi+\tfrac{5}{2}\ \delta_N=k_{N+1}\pi+\delta_{N+1}\qquad (N>N_0)$$

tot een tegenspraak voert, zodat

$$(1.5.5) \qquad \lim_{N\to\infty} \phi_{\frac{2}{5}}(t(\tfrac{5}{2})^N)=0 \quad \text{(alle reële t)}.$$

Stel nu, dat niet $\lim_{t\to\infty} \phi_{\frac{2}{5}}(t)=0$, dan is er een rij $\{t_N\}$ met

$\lim_{N\to\infty} \phi_{\frac{2}{5}}(t_N)=a\neq 0$, terwijl $\{t_N\}$ zo gekozen kan worden, dat

$$(1.5.6) \qquad |\phi_{\frac{2}{5}}(t_N)| \geq b > 0 \quad \text{(alle N)}.$$

We kunnen schrijven

$$t_N = t_N^* \, r^{-n(N)},$$

waarbij n(N) geheel is en t_N^* eenduidig bepaald is in $[1,\frac{5}{2})$. We mogen veronderstellen, dat de rij $\{t_N\}$ zo gekozen is, dat

$$(1.5.7) \qquad t^* \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} t_N^*$$

bestaat. Nu geldt

$$\phi_{\frac{2}{5}}(t_N) = \phi_{\frac{2}{5}}(t_N^*) \prod_{n=0}^{n(N)-1} \cos t_N^* \, (\tfrac{5}{2})^n,$$

dus wegens (1.5.6)

$$(1.5.8) \qquad \prod_{n=0}^{n(N)-1} |\cos t_N^* \, (\tfrac{5}{2})^n| \geq b \quad \text{(alle N)}.$$

Omdat $n(N)\to\infty$, als $N\to\infty$, volgt uit (1.5.7) en (1.5.8)

$$\prod_{n=0}^{M} \cos t^* (\tfrac{5}{2})^n \geq b \quad \text{(alle M)}$$

en dus

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos t^* (\tfrac{5}{2})^n \geq b,$$

in strijd met 1.5.5.

Analoog bewijst men $\lim_{t\to\infty} \phi_r(t)=0$ voor $\frac{1}{r}$ rationaal, niet-geheel.

Tenslotte geven we een voorbeeld van

$\phi=\phi_1\phi_2$, F absoluut continu, F_1 en F_2 singulier:

$$\phi(t)=\phi_{\frac{1}{2}}(t)=\frac{\sin t}{t}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos 2^{-n}t=\prod_{n=1}^{\infty}\cos 4^{-n}t\circ\prod_{n=1}^{\infty}\cos 4^{-n}2t=\phi_{\frac{1}{4}}(t)\circ\phi_{\frac{1}{4}}(2t)=$$

$$=\phi_1(t)\circ\phi_2(t)$$

(zie St. 1.5.3).

2. Limietstellingen

2.0. Samenvatting

In dit hoofdstuk zullen we de belangrijkste aspecten van de theorie van de oneindig deelbare verdelingsfuncties en de daaruit voortvloeiende limietstellingen voor sommen van onafhankelijke stochastische variabelen bespreken. Leiddraad bij dit hoofdstuk is
B.V. GNEDENKO en A.N. KOLMOGOROV, Limit distributions for sums of independent random variables (Cambridge, Mass., 1954).
In par. 1 behandelen we bijzondere stellingen over zwakke convergentie van verdelingsfuncties en over karakteristieke functies, die gedeeltelijk de in hoofdstuk 1 behandelde theorie overlappen.
Daarna komen de oneindig deelbare verdelingsfuncties aan de orde: de definitie, eenvoudige eigenschappen, kanonieke representatie, convergentiestellingen.
Vervolgens wordt het algemene limietprobleem voor sommen van onafhankelijke stochastische variabelen geformuleerd en opgelost; eerst voor het geval de sommanden eindige variantie hebben, daarna algemeen. Deze resultaten worden toegepast op bijzondere situaties. Tenslotte komt dan nog een samenvatting van verdere resultaten.

2.1. Inleiding

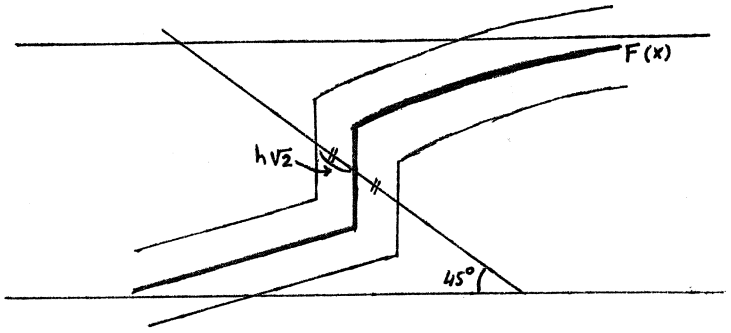
Def. 2.1.1. Onder de Lévy-afstand $\rho(F,G)$ van twee verdelingsfuncties F en G verstaan we

$$\rho(F,G)= \inf \{h \mid \forall x \;\; F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h\} \; .$$

Men bewijst gemakkelijk dat ρ een metriek definiëert. De metrische ruimte van alle verdelingsfuncties met de afstand ρ duiden we in het vervolg aan met $\mathfrak{M}$. De definitie van ρ kan eventueel uitgebreid worden tot de klasse $\mathfrak{M}'$ van alle niet-negatieve veelvouden van verdelingsfuncties.

Om een meetkundig beeld te krijgen van de afstand ρ, beschouwen we de verzameling verdelingsfuncties G die voldoen aan $\rho(F,G) \leq h$ voor een vaste verdelingsfunctie F. Men beschouwt de grafiek van F en rekent daartoe ook alle verticale lijnstukken, dus ook alle punten (x,y) met

$F(x-0) \leq y \leq F(x)$. Dan is vrij eenvoudig in te zien dat het gebied waar de grafiek van G in kan liggen bepaald kan worden door op alle lijnen x+y=a links en rechts van het snijpunt van deze lijn met de grafiek van F(x) (dat nu eenduidig bepaald is) lijnstukken van de lengte $h\sqrt{2}$ uit te zetten. Dit is geschetst in de figuur.



In de volgende stelling geven we een samenvatting en gedeeltelijke uitbreiding van een aantal in hoofdstuk 1 bewezen voorwaarden voor zwakke convergentie.

<u>St. 2.1.1.</u> Zij F_n en rij verdelingsfuncties; ϕ_n de corresponderende rij karakteristieke functies. Voor

(0) $\exists_{F \in \mathfrak{M}} \lim_{n\to\infty} F_n = F$

is ieder van de volgende voorwaarden nodig en voldoende.

(1) $\exists_F$, F monotoon niet-dalend, $F(-\infty)=0$ zo dat

$$\int f dF_n \to \int f dF$$

voor alle begrensde continue functies f.

(2) $\exists_{F \in \mathfrak{M}} \exists_{C \subset R}$ C dicht in R, zo dat

$$\forall_{x \in C} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

(3) $\exists_{F \in \mathfrak{M}'} \rho(F_n, F) \to 0$.

(4) $\exists_\phi \phi_n(t) \to \phi(t)$ uniform op ieder eindig interval.

(5) $\exists_\phi \phi$ continu voor t=0 en $\phi_n(t) \to \phi(t)$.

Opmerking, Vaak wordt (1) als definitie van zwakke convergentie gebruikt. Dit hangt samen met het gebruik van deze term in de functionaalanalyse: als CB de ruimte is van alle begrensde continue functies en CB^* de geadjungeerde ruimte van alle begrensde lineaire functionalen op CB, dan is de zwakke * (ook wel vage of zwakke CB-) topologie in CB^* de topologie van puntsgewijze convergentie, d.w.z. dat een rij functionalen F_n convergeert naar een functionaal $F \in CB^*$ als voor alle $f \in CB$ geldt $F_n(f) \to F(f)$. Nu is $\mathfrak{M}$ (ook $\mathfrak{M}'$) een deelverzameling van CB^* en de zwakke* topologie geeft in $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}'$ juist (1) als definitie van convergentie.

Bewijs

In hoofdstuk 1 zijn de volgende implicaties bewezen:

(2) $\Longrightarrow$ (0) (lemma 1.4.1);

(0) $\Longrightarrow$ (1) (lemma 1.4.4);

(0) $\Longrightarrow$ (4), (0) $\Longrightarrow$ (5) (st. 1.4.1);

(4) $\Longrightarrow$ (0), (5) $\Longrightarrow$ (0) (st. 1.4.3).

Verder is (0) $\Longrightarrow$ (2) triviaal en (1) $\Longrightarrow$ (4) eveneens (zie bewijs van st. 1.4.1). De stelling is dus bewezen als nog aangetoond is dat (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (0).

We bewijzen eerst (2) $\Longrightarrow$ (3):

Kies een positieve ε, bepaal a en b in C zo dat

$$F(a) \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{en} \quad F(b) \geq 1-\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Kies verder de punten $a_0=a, a_1, a_2, \ldots, a_s=b$ zo dat

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_s \quad \text{en} \quad a_k \in C \quad \text{voor } k=1,2,\ldots,s-1,$$

terwijl voor $k=1,2,\ldots,s$ $a_k - a_{k-1} < \varepsilon$ is. Kies verder N zo groot dat voor $n \geq N$ en voor alle $k=0,1,\ldots,s$ geldt

$$|F_n(a_k) - F(a_k)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

We bewijzen dan dat voor alle x en $n \geq N$ geldt

(a) $$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F_n(x) \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon \ .$$

Zij eerst $a_{k-1} \leq x \leq a_k$ voor een $k \in \{1,2,\ldots,s\}$. Dan is

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(a_{k-1})-\varepsilon \leq F_n(a_{k-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(a_k) \leq F(a_k)+\varepsilon \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon .$$

Vervolgens, als $x \geq b=a_s$:

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq 1-\varepsilon \leq F(a_s)-\tfrac{1}{2}\varepsilon \leq F_n(a_s) \leq F_n(x) \leq 1 \leq F(a_s)+\tfrac{1}{2}\varepsilon \leq F(x)+\tfrac{1}{2}\varepsilon \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon,$$

en als $x \leq a=a_0$:

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(x)-\tfrac{1}{2}\varepsilon \leq F(a_0)-\tfrac{1}{2}\varepsilon \leq 0 \leq F_n(x) \leq F_n(a_0) \leq F(a_0)+\tfrac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon.$$

Dus (a) geldt voor alle x en $n \geq N$. Dus voor $n \geq N$ is

$$\rho(F,F_n) \leq \varepsilon.$$

Daarmee is (2)$\Longrightarrow$(3) bewezen.
Tenslotte bewijzen we (3)$\Longrightarrow$(0). Zij x_0 een continuiteitspunt van $F(x)$. Dan geldt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x-x_0| \leq \delta \Longrightarrow |F(x)-F(x_0)| < \varepsilon.$$

Stel $H = \min\{\varepsilon,\delta\}$ en kies n zo groot dat $\rho(F_n,F) < H$. Dan is

$$F(x_0)-2\varepsilon \leq F(x_0-H)-H \leq F_n(x_0) \leq F(x_0+H)+H \leq F(x_0)+2\varepsilon,$$

dus

$$|F_n(x_0)-F(x_0)| \leq 2\varepsilon,$$

dus

$$F_n(x_0) \to F(x_0).$$

Hiermee is (3)$\Longrightarrow$(0) en daarmee de stelling bewezen.

De nu volgende stelling is een verscherping van lemma 1.4.2. Ter inleiding merken we op dat een deelverzameling A van een topologische ruimte $\mathcal{A}$ voorwaardelijk compact heet als zijn afsluiting compact is. Hierbij gebruiken we de term compact in de zin van rij-compactheid, d.w.z. een verzameling B is compact als iedere oneindige deelverzameling van B een tot B behorend verdichtingspunt heeft. Een deelverzameling A van een topologische ruimte $\mathcal{A}$ is dus in deze zin voorwaardelijk compact als iedere oneindige deelverzameling van A een verdichtingspunt in $\mathcal{A}$ heeft. De bovenbedoelde generalisatie van lemma 1.4.2 luidt nu:

St. 2.1.2. Een deelverzameling S van $\mathfrak{M}$ is voorwaardelijk compact (ten opzichte van $\mathfrak{M}$) dan en slechts dan als uniform in $F \in S$ geldt

$$F(x) \to 0 \text{ voor } x \to -\infty$$

en

$$F(x) \to 1 \text{ voor } x \to \infty.$$

Met andere woorden: S is voorwaardelijk compact dan en slechts dan als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{A>0}\ \forall_{F\in S}\ [(x<-A \Rightarrow F(x)<\varepsilon) \wedge (x>A \Rightarrow F(x)>1-\varepsilon)].$$

Bewijs:

"dan". Uit lemma 1.4.2 volgt dat we in iedere oneindige deelverzameling van S een zwak convergente rij $\{F_n\}$ kunnen kiezen. Dat de zwakke limiet van deze rij dan een verdelingsfunctie is is een direct gevolg van de gegeven uniformiteit.

"slechts dan". Zij S voorwaardelijk compact en veronderstel

$$(b)\quad \exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{A>0}\ \exists_{F\in S}^{(\exists x}\ [(x<-A \wedge F(x) \geq \varepsilon) \vee (x>A \wedge F(x) \leq 1-\varepsilon)].$$

Laat A de waarden $1,2,3,\ldots$ doorlopen en laten $F_1, F_2, \ldots$ de bijbehorende verdelingsfuncties zijn. De rij $\{F_n\}$ bevat dan een zwak naar een verdelingsfunctie G convergerende deelrij $\{G_k\}$ $(G_k = F_{n_k})$ met dus een bijbehorende rij $\{A_k\}$ waarvoor $A_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Dan is dus voor iedere k een van de volgende relaties vervuld:

$$x < -A_k \wedge G_k(x) \geq \varepsilon$$

of

$$x > A_k \wedge G_k(x) \leq 1-\varepsilon.$$

Tenminste een van deze relaties is dus voor oneindig veel waarden van k vervuld. Dit leidt echter onmiddellijk tot een tegenspraak met het feit dat de zwakke limiet F een verdelingsfunctie moet zijn omdat uit het oneindig vaak vervuld zijn van een van beide relaties direct volgt $F(-\infty) \geq \varepsilon$ of $F(+\infty) \leq 1-\varepsilon$. Dus (b) is niet waar en daarmee is het tweede deel van de stelling bewezen.

St. 2.1.3 $(\mathfrak{M}, \rho)$ is een volledige metrische ruimte.

Opmerking. Een metrische ruimte $(\mathcal{A}, d)$ heet volledig als iedere Cauchy-

rij in $\mathcal{A}$ (dat is een rij $\{x_k\}$, $x_k \in \mathcal{A}$ met $d(x_n,x_m) \to 0$ voor $n,m \to \infty$) convergent is.

Bewijs Zij $\{F_n\}$ een Cauchy-rij in $\mathfrak{M}$:

$$\rho(F_n,F_m) \to 0 \text{ voor } n,m \to \infty.$$

Kies een dichte aftelbare deelverzameling $C=\{x_1,x_2,\ldots\}$ van de reële rechte. Met behulp van een diagonaal procédé kunnen we een rij natuurlijke getallen $n_1 < n_2 < \ldots$ bepalen met de eigenschap dat $F_{n_k}(x_s)$ convergent is voor $s=1,2,\ldots$.

Zij

$$\overline{F}(x_s) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x_s)$$

en

$$F(x) = \inf_{\substack{x_s > x \\ x_s \in C}} \overline{F}(x_s).$$

Dan is $F(x)$ overal gedefiniëerd, niet afnemend en continu van rechts. Verder is er, bij een voorgeschreven $\varepsilon > 0$, een n zo dat $\rho(F_n,F_m) < \varepsilon$ als $m \geq n$. Bepaal z zodanig dat $F_n(z) < \varepsilon$. Dan is voor alle $x_s < z-\varepsilon$ $(x_s \in C)$ en $n_k \geq n$

$$F_{n_k}(x_s) \leq F_n(x_s+\varepsilon)+\varepsilon \leq F_n(z)+\varepsilon < 2\varepsilon,$$

dus

$$0 \leq \overline{F}(x_s) \leq 2\varepsilon$$

voor alle $x_s \in C$ met $x_s < z-\varepsilon$. Daarom is

$$F(z') \leq 2\varepsilon, \text{ als } z' < z-\varepsilon$$

dus

$$F(-\infty) = \lim_{z\to-\infty} F(z) = 0.$$

Op soortgelijke wijze bewijst men dat $F(\infty)=1$, dus F is een verdelingsfunctie.

Zij x_0 een continuiteitspunt van F(x). Bepaal h zo dat

$$F(x_0)-F(x_0-h) < 1/7\ \varepsilon.$$

Dan zijn er dus punten x_s en $x_{s'}$ in C zo dat $x_s > x_0 \geq x_{s'} > x_0-h$ en

$$\overline{F}(x_s)-F(x_0) < 1/7\varepsilon\ ,\ \overline{F}(x_{s'})-F(x_0-h) < 1/7\varepsilon\ .$$

Bepaal dan N zo groot dat voor $k \geq N$ geldt

$$|\overline{F}(x_s)-F_{n_k}(x_s)| < 1/7\varepsilon\ ,\ |\overline{F}(x_{s'})-F_{n_k}(x_{s'})| < 1/7\varepsilon\ .$$

Dan is, voor $k \geq N$

$$|F(x_0)-F_{n_k}(x_0)| \leq |F(x_0)-\overline{F}(x_s)|+|\overline{F}(x_s)-F_{n_k}(x_s)|+|F_{n_k}(x_s)-F_{n_k}(x_0)| \leq$$

$$\leq 2/7\varepsilon + |F_{n_k}(x_s)-F_{n_k}(x_{s'})| \leq 2/7\varepsilon+|F_{n_k}(x_s)-\overline{F}(x_s)|+|\overline{F}(x_s)-F(x_0)|+$$

$$+ |F(x_0)-F(x_0-h)|+|F(x_0-h)-\overline{F}(x_{s'})|+|\overline{F}(x_{s'})-F_{n_k}(x_{s'})| < \varepsilon.$$

Dus, voor ieder continuïteitspunt x_0 van F(x) geldt

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x_0) = F(x_0),$$

dus

$$\operatorname{Lim}_{k\to\infty} F_{n_k} = F.$$

Volgens st. 2.1.1. is dan

$$\lim_{k\to\infty} \rho(F_{n_k},F) = 0,$$

dus met de driehoeks ongelijkheid

$$\lim_{n\to\infty} \rho(F_n,F) = 0$$

en, weer volgens st. 2.1.1 volgt hieruit

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} F_n = F.$$

Zonder bewijs geven we nog de volgende generalisaties.

Zij $\mathcal{M}'$ de metrische ruimte van alle monotton niet dalende functies M met

$$M(-\infty) = 0 \text{ en } M(+\infty) < \infty$$

met de metriek ρ[1]. Laat zwakke convergentie van dit soort functies gedefiniëerd zijn door: M_n convergeert zwak naar M als $\lim_{n\to\infty} M_n(x)=M(x)$ in ieder continuïteitspunt van M en voor $x=+\infty$.
Dan gelden:

St. 2.1.1'. Zij M_n een rij elementen van $\mathfrak{M}'$. Voor de zwakke convergentie van deze rij naar een $M \in \mathfrak{M}'$ in ieder van de volgende voorwaarden nodig en voldoende

(1) $\int f dM_n \to \int f dM$ voor alle begrensde continue f.

(2') $M_n(x) \to M(x)$ voor alle x in een dichte deelverzameling van de reële rechte en $M_n(+\infty) \to M(+\infty)$.

(3') $\rho(M_n, M) \to 0$.

St. 2.1.2'. Een deelverzameling S' van $\mathfrak{M}'$ is voorwaardelijk compact (ten opzichte van $\mathfrak{M}'$) dan en slechts dan als uniform in $M \in S'$ geldt

$$M(x) \to 0 \quad (x \to -\infty),$$
$$M(x) \to M(+\infty) \quad (x \to +\infty),$$

terwijl de verzameling $\{M(+\infty) \mid M \in S'\}$ begrensd is.

St. 2.1.3'. $\mathfrak{M}'$ is een volledige metrische ruimte.

Vaak biedt het voordelen om een bepaald limietprobleem (hebben de verdelingsfuncties F_n van een rij stochastische variabelen $\underline{x}_n$ een zwakke limiet) te generaliseren door een klasse van transformaties T toe te laten en nu de vraag te stellen of er een rij transformaties $\alpha_n \in T$ is zo dat de verdelingen van $\alpha_n \underline{x}_n$ een zwakke limiet hebben. Opdat een dergelijke generalisatie zinvol is zal aan een aantal voorwaarden voldaan moeten zijn: de transformaties in T zullen continu

---

1) De verzameling $\mathfrak{M}'$ kan dus ook gekarakteriseerd worden als de verzameling van alle niet-negatieve veelvouden van verdelingsfuncties.

en omkeerbaar moeten zijn (anders geeft de algemenere limietstelling geen informatie over het speciale geval). Verder zal het wenselijk zijn dat twee zwak convergente rijen, die door een rij transformaties uit T in elkaar zijn over te voeren, zwakke limieten hebben die door een transformatie uit T in elkaar zijn over te voeren.

Aan al deze eisen is voldaan als we voor T nemen de groep die bestaat uit de lineaire transformaties

$$\underline{x} \to \alpha\underline{x} + \beta \quad (\alpha > 0).$$

We voeren het hiermee samenhangende begrip type van een verdelingsfunctie in.

Def. 2.1.2. Twee verdelingsfuncties F en G behoren tot hetzelfde type als er constanten $\alpha > 0$ en β zijn, zodat

$$F(\alpha x+\beta) = G(x).$$

De relatie "tot hetzelfde type behoren" is kennelijk een equivalentie relatie en deze relatie brengt dus een splitsing in equivalentieklassen van verdelingsfuncties voort. Een bepaalde equivalentieklasse zullen we een verdelingstype noemen. Zo hebben we het normale type, het Poisson type met vaste parameter, het ontaarde type. In overeenstemming met wat hierboven in het algemeen gezegd werd bewijzen we nu de volgende twee stellingen.

St. 2.1.4 Als $\lim F_n = F \in \mathfrak{M}$, $\lim G_n = G \in \mathfrak{M}$,
$G_n(x) = F_n(a_n x+b_n)$ $(a_n > 0)$, F en G niet ontaard,
dan behoren F en G tot hetzelfde type.

Bewijs.
Het ligt voor de hand om te vermoeden dat de rijen a_n en b_n convergent zijn naar a resp b en dat dan G(x)=F(ax+b) zal zijn. Nu kunnen we in ieder geval een rij indices $\{n_k\}$ bepalen zodanig dat $\{a_{n_k}\}$ en $\{b_{n_k}\}$ convergent zijn naar limieten a en b waarvoor

$$0 \leq a \leq \infty \; ; \; -\infty \leq b \leq \infty.$$

We willen een bewering bewijzen voor de limiet van de rijen F_n en G_n, dus we kunnen van nu af volstaan met alleen de deelrijen $\{F_{n_k}\}$ en $\{G_{n_k}\}$ te beschouwen. Daarom zullen we deze rijen omnummeren tot $\{F_n\}$ en $\{G_n\}$. We zullen nu achtereenvolgens bewijzen dat

$$a < \infty \ , \ -\infty < b < \infty \text{ en } a > 0.$$

1) Stel $a=\infty$. Zij

$$u = \sup \{x \mid \limsup_{n \to \infty} (a_n x+b_n) < \infty\}.$$

Het geval dat $u=-\infty$ is kan direct uitgesloten worden, want dan geldt voor alle x $\limsup (a_n x+b_n)=\infty$. Dan volgt echter direct uit $\operatorname{Lim} G_n=G$, dat $G(x)=1$ voor alle continuïteitspunten van G, zodat G geen verdelingsfunctie zou zijn. Als $u > -\infty$ is, dan is voor $v < x < u$

$$\limsup_{n \to \infty} (a_n v+b_n) \leq \limsup_{n \to \infty} (v-x)a_n + \limsup_{n \to \infty} (a_n x+b_n) = -\infty,$$

zodat voor $v < u$ $G(v) = 0$ is, terwijl voor $v > u$

$$\limsup_{n \to \infty} (a_n v+b_n) = \infty$$

is zodat dan $G(v)=1$ is. Dus dan zou G ontaard zijn in strijd met het gegeven. Dus is $a < \infty$.

2) Stel $b=+\infty$, dan is dus $\lim(a_n x+b_n)= \infty$, dus $G(x)=1$.
Anderzijds: als $b=-\infty$ is, dan is voor alle x $\lim (a_n x+b_n)=-\infty$ zodat dan $G(x)=0$ is. In beide gevallen zou dus $G \notin \mathcal{W}$ zijn, hetgeen weer een tegenspraak oplevert. Dus is $-\infty < b < +\infty$.

3) Stel $a=0$. Dan is er voor alle x en alle $\varepsilon > 0$ een n zo dat geldt

$$b-\varepsilon \leq a_n x+b_n \leq b+\varepsilon \ ,$$

dus

$$F_n(b-\varepsilon) \leq G_n(x) \leq F_n(b+\varepsilon).$$

Laat ε zo gekozen zijn dat $b-\varepsilon$ en $b+\varepsilon$ continuïteitspunten van F zijn, dan geldt voor ieder continuïteitspunt x van G

$$F(b-\varepsilon) \leq G(x) \leq F(b+\varepsilon).$$

Deze ongelijkheid geldt nu voor alle continuïteitspunten van G, zodat $F(b-\varepsilon)=0$ en $F(b+\varepsilon)=1$ moet zijn. Omdat dit weer geldt voor alle $\varepsilon > 0$ die zo gekozen zijn dat $b \pm \varepsilon$ continuïteitspunten van F zijn, is F dus in b ontaard, in strijd met het gegeven. Dus is $a > 0$.

Kies nu een x met de eigenschap dat G continu is in x en F continu in $ax+b$. Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n x+b_n)=ax+b,$$

zodat voor voldoend grote n

$$ax+b-\varepsilon \leq a_n x+b_n \leq ax+b+\varepsilon.$$

Hierbij is $\varepsilon >0$ weer zo gekozen dat F continu is in $ax+b-\varepsilon$ en in $ax+b+\varepsilon$, zodat

$$F(ax+b-\varepsilon) \leq \liminf F_n(a_n x+b_n) \leq \limsup F_n(a_n x+b_n) \leq F(ax+b+\varepsilon),$$

waaruit, wegens continuïteit van F in $ax+b$ volgt

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x+b_n) = F(ax+b).$$

Anderzijds is

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x+b_n) = \lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x),$$

omdat x continuïteitspunt van G was. Dus, in alle punten x, waar G(x) en F(ax+b) continu zijn geldt

$$G(x) = F(ax+b),$$

en omdat G en F(ax+b) verdelingsfuncties zijn geldt deze gelijkheid voor alle x, dus G en F zijn van hetzelfde type.

<u>St. 2.1.5.</u> Zij $\{F_n\}$ een rij verdelingsfuncties; $G_n(x)=F_n(a_n x+b_n)$, $H_n(x) = F_n(\alpha_n x+\beta_n)$ $(a_n>0, \alpha_n>0)$; $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} G_n = F \in \mathcal{M}$; F niet ontaard.

Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} H_n = F$$

dan en slechts dan als

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \to 1 \text{ en } \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \to 0.$$

Bewijs

"dan". Laten x_1, x en x_2 continuïteitspunten van F zijn, met $x_1 < x < x_2$. Dan is, voor voldoend grote n

$$x_1 < \frac{\alpha_n}{a_n} x + \frac{\beta_n - b_n}{a_n} < x_2 ,$$

dus

$$a_n x_1 + b_n < \alpha_n x + \beta_n < a_n x_2 + b_n .$$

dus

$$F_n(a_n x_1 + b_n) \leq F_n(\alpha_n x + \beta_n) \leq F_n(a_n x_2 + b_n)$$

of

$$G_n(x_1) \leq H_n(x) \leq G_n(x_2).$$

Na limietovergang geeft dit

$$F(x_1) \leq \liminf H_n(x) \leq \limsup H_n(x) \leq F(x_2),$$

voor alle continuïteitspunten x_1, x en x_2, dus

$$\lim H_n(x) = F(x),$$

dus

$$\operatorname{Lim} H_n = F.$$

"slechts dan". Stel $A_n = \frac{\alpha_n}{a_n}$ en $B_n = \frac{\beta_n - b_n}{a_n}$. Dan is dus

$$H_n(x) = G_n(A_n x + B_n).$$

Voor ieder verdichtingspunt A van $\{A_n\}$ en B van $\{B_{n_k}\}$ als $A_{n_k} \to A$ kunnen we, als in het bewijs van st. 2.1.4, aantonen dat

$$0 < A < \infty \quad \text{en} \quad -\infty < B < \infty.$$

Zij m_k een rij waarvoor $A_{m_k} \to A$ en $B_{m_k} \to B$ en laat x zo zijn dat zowel x als Ax+B continuïteitspunten van F zijn, dan geldt

$$F(x)= \lim_{k\to\infty} H_{m_k}(x)= \lim_{k\to\infty} G_{m_k}(A_{m_k} x+B_{m_k})=F(Ax+B)$$

(zie ook bewijs van st. 2.1.4 hierboven). Deze betrekking geldt dus weer voor alle x. Stel dat niet geldt A=1, dan is

$$F(x)= F(A^n x + B. \frac{A^n-1}{A-1}),$$

voor alle n, dus de limiet van het rechterlid bestaat voor $n\to\infty$ en dit leidt voor

$$A < 1 \quad \text{tot} \quad F(x)=F(\tfrac{B}{1-A}) \text{ of } F_-(\tfrac{B}{1-A}),$$

en dus tot tegenspraak, en voor

$$A > 1 \quad \text{tot} \quad F(x)= \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{voor} & x+\frac{B}{A-1} > 0 \\ 0 & \text{voor} & x+\frac{B}{A-1} < 0 \end{matrix} \right\},$$

hetgeen in strijd is met het niet ontaard zijn van F. Dus is A=1. Stel dan dat $B\neq 0$ is. Dan is dus

$$F(x)= F(x+B)= \ldots = F(x+nB),$$

zodat F(x)=1 voor alle x, hetgeen weer een tegenspraak oplevert.

Tot slot van dit hoofdstuk geven we nog een aantal stellingen over karakteristieke functies.

<u>St. 2.1.6.</u> Als $\phi(t)$ een karakteristieke functie is, dan geldt voor alle t

$$1 - \text{Re } \phi(2t) \leq 4\,(1-\text{Re } \phi(t)).$$

<u>Bewijs</u>

$$1 - \text{Re } \phi(2t)= \int(1-\cos 2tx)dF(x)=2 \int(1-\cos tx)(1+\cos tx)\, dF(x) \leq$$

$$\leq 4 \int(1-\cos tx)\, dF(x) \leq 4(1-\text{Re } \phi(t)).$$

St. 2.1.7. Als $\phi(t)$ een karakteristieke functie is en er is een rij $\{t_n\}$ die naar 0 convergeert, terwijl voor alle n $|\phi_n(t)|=1$ is, dan is $\phi(t)$ karakteristieke functie van een ontaarde verdeling.

Bewijs

Uit St. 1.1.1 volgt dat de met $\phi(t)$ corresponderende stochastische variabele een roostervariabele $\underline{x}$ moet zijn. Zij dus

$$P\{\underline{x}=a+kb\} = p_k \quad (k \text{ geheel}; \; p_0 \neq 0)$$

en stel dat $b\neq 0$ is, er is een $k_0\neq 0$ met $p_{k_0}\neq 0$. Dan is

$$|\phi(t)| = |e^{ita} \sum_k p_k e^{itkb}| \leq |p_0+p_{k_0} e^{itk_0b}| + (1-p_0-p_{k_0}) =$$

$$= (1-p_0-p_{k_0}) + \sqrt{p_0^2+2p_0p_{k_0}\cos tbk_0+p_{k_0}^2} \,,$$

zodat voor $0 < |t| < \frac{\pi}{|bk_0|}$ geldt

$$|\phi(t)| < (p_0+p_{k_0}) + (1-p_0-p_{k_0}) = 1,$$

in strijd met het gegeven. Dus $\underline{x}$ is ontaard.

St. 2.1.8. Bij een rij verdelingsfuncties F_n kan dan en slechts dan een rij constanten α_n gevonden worden zodanig dat voor de verdelingsfuncties $G_n(x)=F_n(x+\alpha_n)$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \mathcal{E}$$

(waar $\mathcal{E}(x)$ de ontaarde verdeling met kans 1 in x=0 voorstelt), als

$$\lim_{n\to\infty} |\phi_n(t)| = 1.$$

Bewijs

"slechts dan". De karakteristieke functie van G_n is $e^{-it\alpha_n}\phi_n(t)$. en volgens st. 2.1.1 geldt

$$e^{-it\alpha_n}\phi_n(t) \to 1,$$

zodat

$$|\phi_n(t)| \to 1.$$

"dan". Zij $|\phi_n(t)| \to 1$, dan is ook

$$|\phi_n(t)|^2 \to 1.$$

Nu is $|\phi_n(t)|^2$ karakteristieke functie van het verschil van twee onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{x}_n$ en $\underline{y}_n$ die beide de verdeling F_n hebben. Daar de karakteristieke functie van $\underline{x}_n - \underline{y}_n$ naar 1 convergeert geldt dus volgens st. 2.1.1 dat de verdeling van $\underline{x}_n - \underline{y}_n$ zwak naar de ontaarde verdelingsfunctie $\mathcal{C}$ convergeert. Dus

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim P\{|\underline{x}_n - \underline{y}_n| \geq \varepsilon\} = 0.$$

2.2 Oneindig deelbare verdelingen

Als men het algemene limietprobleem voor sommen van onafhankelijke stochastische variabelen beschouwt, ruw gezegd de vraag welke verdelingen op kunnen treden als limietverdeling van de som van een rij onafhankelijke stochastische variabelen (een precieze formulering volgt in par. 2.3), dan is het intuïtief direct duidelijk dat een verdeling met de eigenschap dat de bijbehorende stochastische variabele voor iedere n som is van n onafhankelijke gelijkverdeelde variabelen aan deze eis zal voldoen. Daarom zullen we deze verdelingen in deze paragraaf onderzoeken.
We geven eerst de formele definitie.

Def. 2.2.1. Een stochastische variabele $\underline{x}$ (resp. zijn verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}$, resp. zijn karakteristieke functie $\phi_{\underline{x}}$) heet oneindig deelbaar als er voor ieder natuurlijk getal n, n onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ gevonden kunnen worden, die alle dezelfde verdeling hebben, en zo dat $\underline{x}=\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n$.

Voor de karakteristieke functie ϕ van een oneindig deelbare stochastische variabele $\underline{x}$ moet dus gelden: voor elke natuurlijke n is er een karakteristieke functie ϕ_n zo dat $\phi=(\phi_n)^n$.
Voorbeelden zijn: normale verdeling, Poisson verdeling , Cauchy verdeling, zoals door beschouwing van de karakteristieke functies direct is in te zien.

St. 2.2.1. Een oneindig deelbare karakteristieke functie ϕ heeft geen reële nulpunten en voor de rij karakteristieke functies $\phi_n=\phi^{1/n}$ geldt

$$\phi_n \to 1.$$

Bewijs
$\phi = (\phi_n)^n$, dus voor $\psi_n = |\phi_n|^2$ geldt $(\psi_n)^n = |\phi|^2$. ψ_n is reeël, dus $\psi_n(t) \to \chi(t)$ met $\chi(t) = 0$ of 1 al naar $\phi(t) = 0$ of $\neq 0$. ϕ is continu in $t = 0$, dus er is een omgeving van $t = 0$ waar $\phi \neq 0$ is, zodat in deze omgeving $\chi = 1$ is. Dus χ is continu voor $t = 0$, dus χ is een karakteristieke functie (st. 2.1.1). Dus χ is continu voor alle t,

dus $\chi(t)=1$ voor alle t. Hieruit volgt weer dat $\phi(t)\neq 0$ voor alle t. Dus is ϕ_n als continue functie eenduidig bepaald als de hoofdwaarde van $\phi^{1/n}$, zodat

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} (\phi(t))^{1/n} = 1.$$

St. 2.2.2. Eindige sommen van onafhankelijke oneindig deelbare stochastische variabelen zijn oneindig deelbaar. Zwakke limieten van oneindig deelbare verdelingen zijn oneindig deelbaar.

Bewijs

De eerste bewering is triviaal.

Voor het bewijs van de tweede bewering veronderstellen we dat $\phi^{(n)}$ voor alle n een oneindig deelbare karakteristieke functie is en dat $\phi^{(n)} \to \phi$, waar ϕ een karakteristieke functie is. Zij $\phi_k^{(n)}$ de eenduidig bepaalde karakteristieke functie waarvoor

$$(\phi_k^{(n)})^k = \phi^{(n)}.$$

Uit $\phi^{(n)} \to \phi$ en het feit (st. 2.2.1) dat voor alle reële t $\phi^{(n)}(t)\neq 0$ is volgt dan direct dat

$$\phi_k^{(n)} = (\phi^{(n)})^{1/k} \to \phi^{1/k},$$

met de hoofdwaarde voor $\phi^{1/k}$. Omdat $\phi(0)=1$ is, is $\phi^{1/k}$ continu in een omgeving van t = 0, dus volgens st. 2.1.1 is $\phi^{1/k}$ karakteristieke functie. Daarmee is de stelling bewezen.

St. 2.2.3. Als $\phi(t)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie is, dan is voor alle reële $c > 0$, de functie ϕ^c een oneindig deelbare karakteristieke functie (De functie ϕ^c is weer als hoofdwaarde: $e^{c\,\mathrm{Log}\,\phi}$ gedefinieerd, hetgeen kan op grond van st. 2.2.1).

Bewijs

Voor positieve rationale c is de bewering een direct gevolg van de definitie en van st. 2.2.2. Voor irrationale c kan ϕ^c uniform op

ieder eindig interval geapproximeerd worden door ϕ^r met rationele r, zodat ϕ^c karakteristieke functie is op grond vsn st. 2.1.1, terwijl ϕ^c oneindig deelbaar is op grond van st. 2.2.2.

St. 2.2.4. De klasse van alle oneindig deelbare verdelingsfuncties valt samen met de klasse van alle zwakke limieten van eindige convoluties van Poisson verdelingen.

Bewijs

Dat de zwakke limiet van een rij eindige convoluties van Poisson verdelingen oneindig deelbaar is, volgt uit het oneindig deelbaar zijn van alle Poisson verdelingen en st. 2.2.2.

Zij, voor het omgekeerde, ϕ een oneindig deelbare karakteristieke functie en stel

$$\phi_n = \phi^{1/n}.$$

Dan is ϕ_n een karakteristieke functie en

$$\phi_n(t) = \int e^{itx} dF_n(x),$$

waar F_n een verdelingsfunctie is. $\phi(t) \neq 0$ voor reële t, dus

$$n(\phi_n(t)-1) = n((\phi(t))^{1/n}-1) = n(e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}\phi(t)}-1) =$$

$$= n(\tfrac{1}{n}\operatorname{Log}\phi(t) + o(\tfrac{1}{n})) \to \operatorname{Log}\phi(t) \quad (n \to \infty).$$

Daaruit volgt

$$e^{n(\phi_n(t)-1)} \to \phi(t).$$

Nu is

$$n(\phi_n(t)-1) = n \int (e^{itx}-1)\, dF_n(x) =$$

$$= n. \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (e^{itc^n_{k,m}}-1)\left[F_n(c^n_{k,m}) - F_n(c^n_{k-1,m})\right] =$$

$$\underline{\underline{\text{afk.}}}\ n. \lim_{m\to\infty} A^{(n)}_m,$$

zodat

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} n. \lim_{m\to\infty} A^{(n)}_m.$$

Men kan dus rijen $\{n_k\}$ en $\{m_k\}$ bepalen zodat

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty} n_k A_{m_k}^{(n_k)}.$$

Stelt men dan

$$a_{k_j} = n_k \left| F_{n_k}(c_{j,m_k}^{n_k}) - F_{n_k}(c_{j-1,m_k}^{n_k}) \right|$$

en

$$c_{k,j} = c_{j,m_k}^{n_k},$$

dan is dus

$$\phi(t) = \lim_{k\to\infty} e^{\sum_{j=1}^{m_k} a_{k,j}(e^{itc_{k,j-1}})},$$

waarmee de bewering bewezen is.

Opmerking

Voor toekomstig gebruik is het nog van belang om op te merken dat de limietrelatie

$$n(\phi_n(t)-1) \to \operatorname{Log} \phi(t) \quad (n \to \infty)$$

uniform op ieder eindig interval vervuld is. Om dit in te zien, merken we op dat uit $\phi(t)\neq 0$ voor reële t volgt dat bij een eindig t-interval een $a > 0$ gevonden kan worden zodat voor alle t in dit interval

$$1 \geq |\phi(t)| \geq a$$

geldt. Hieruit leidt men gemakkelijk af dat in dit interval geldt

$$|n(\phi_n(t)-1)-\phi(t)| \leq n(\exp\tfrac{p}{n} - \tfrac{p}{n} - 1),$$

als p een bovengrens van $\operatorname{Log} \phi(t)$ is.

Men kan met behulp van deze stelling een aantal niet-triviale voorbeelden van oneindig deelbare verdelingen construeren (niet-triviaal in de zin dat niet direct is in te zien dat $\phi^{1/n}$ weer een karakteristieke functie is). We geven hier de volgende twee:

Voorbeeld 1. De functie

$$\phi(t) = (1-b)(1-be^{it})^{-1} \qquad (0 < b < 1)$$

is een oneindig deelbare karakteristieke functie.

Bewijs

$$\phi(t) = (1-b) \sum_{k=0}^{\infty} b^k e^{ikt} ,$$

dus $\phi(t)$ is karakteristieke functie van een roostervariabele met kansen $\{b^k(1-b)\}$. Verder is $\phi(t) \neq 0$ voor reële t, dus log $\phi(t)$ is eenduidig bepaald als continue functie en

$$\text{Log } \phi(t) = \text{Log } (1-b) - \text{Log } (1-be^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{ikt}-1) \frac{b^k}{k} ,$$

zodat de bewering uit st. 2.2.4 volgt (iedere term van de reeks is nl. logarithme van een Poisson-karakteristieke functie).

Voorbeeld 2. $\zeta(s)$ is de ζ-functie van Riemann, gedefiniëerd door

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\text{Re } s > 1)$$

of

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ priem}} (1-p^{-s})^{-1} \quad (\text{Re } s > 1).$$

Zij

$$\phi(t) = \frac{\zeta(\sigma+it)}{\zeta(\sigma)} \qquad (\sigma > 0),$$

dan is

$$\text{Log } \phi(t) = \sum_{p} \left[\text{Log } (1-p^{-\sigma}) - \text{Log } (1-p^{-\sigma-it})\right] =$$

$$= \sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-m\sigma}}{m} (e^{-imt \log p} - 1),$$

zodat $\phi(t)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie is.

Kanonieke representaties.

Opmerking Voor het bewijs van de volgende stelling hebben we een lemma nodig dat in de algemene maat- en intepatietheorie thuishoort en wel

lemma 2.2.1. Zij $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ een eindige maatruimte; f een $\mathcal{S}$-meetbare reële functie op Ω , met $f \geq 0$. Laat λ gedefiniëerd zijn door

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu .$$

Dan is λ een maat op $(\Omega, \mathcal{G})$ en voor iedere meetbare reële functie g en alle $A \in \mathcal{G}$ geldt

$$\text{(I)} \qquad \int_A g d\lambda = \int_A fg d\mu ,$$

in de zin dat als een van beide leden niet bestaat, het andere lid ook niet bestaat.
Als bovendien geldt dat voor alle ω $f(\omega) > 0$ is, dan geldt bovendien voor alle $A \in \mathcal{G}$ en alle meetbare g

$$\text{(II)} \qquad \int_A g d\mu = \int_A \frac{g}{f} d\lambda \ ;$$

dus in het bijzonder is

$$\text{(III)} \qquad \mu(A) = \int_A \frac{1}{f} d\lambda .$$

Bewijs van het lemma:
Dat λ een maat is volgt direct uit eigenschap I2 (pag. 117 van de syllabus S 295 van dit colloquium). Zij $\mathcal{N}$ de klasse van alle sommeerbare functies g waarvoor (I) vervuld is. Dan kan men onmidellijk verifiëren dat $\mathcal{N}$ een lineaire ruimte is (op grond van I4 en I5, pag. 118 van S 295) die gesloten is (bv. met st. 2.2.9 (gemajoreerde convergentie) pag 122 van S 295) en die de meetbare trap functies bevat. Dus $\mathcal{N}$ bevat alle meetbare sommeerbare functies. Door g in g^+ en g^- te splitsen leidt men hieruit direct af dat beide integralen in (I) óf beide bestaan óf beide niet bestaan.

Op grond van het voorafgaande volgt anderzijds uit $f(\omega) > 0$ voor alle ω, omdat dan g/f weer een meetbare functie is:

$$\forall A \in \mathcal{G} \quad \int_A g/f \ d\lambda = \int_A (g/f) . f \, d\mu = \int_A g d\mu .$$

Daarmee is het lemma bewezen.
<u>St. 2.2.5.</u> Een functie $\phi(t)$ is een oneindig deelbare karakteristieke functie dan en slechts dan als er een reële γ en een $G \in \mathcal{M}'$ is zo dat

(a) $$\text{Log } \phi(t) = i\gamma t + \int \{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\} \frac{1+u^2}{u^2} \, dG(u),$$

waar de waarde van de integrand voor u=0 bepaald wordt (door continuïteit) als $-\frac{t^2}{2}$. De representatie (a) is uniek.

Opmerking 1. Verdelingen met karakteristieke functie

$$\phi(t) = \exp \int (e^{itu} - 1) \, dG(u)$$

waar G(u) een positief veelvoud van een verdelingsfunctie is, worden in de literatuur gegeneraliseerde Poisson verdelingen genoemd (terminologie van Feller, A.M.S. 14 (1943), 389-400). In termen van stochastische variabelen kan men $\phi(t)$ beschrijven als de karakteristieke functie van de stochastische variabele

$$\underline{S} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_{\underline{n}},$$

waarin $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen is met verdeling $\frac{G(x)}{G(+\infty)}$, terwijl $\underline{n}$ onafhankelijk is van de $\underline{x}$ - en een Poisson verdeling met parameter $G(+\infty)$ heeft.
(De zg. samengestelde Poisson verdeling wordt verkregen als een gewogen gemiddelde van Poisson verdelingen met verschillende parameter:

$$H(k) = \int e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^k}{k!} \, dG(\vartheta),$$

waar G een verdelingsfunctie over de positieve halfrechte is. De karakteristieke functie van H is dan

$$\psi(t) = \chi(i(1-e^{it})),$$

als χ de karakteristieke functie van G is).

Bewijs van st. 2.2.5:

"dan": Dat een karakteristieke functie van de gedaante (a) oneindig deelbaar is volgt direct door de integraal in het rechterlid te approximeren door Riemann-Stieltjes sommen en dan st. 2.2.4 toe te passen.

"slechts dan": Zij $\phi(t)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie. Evenals in het bewijs van st. 2.2.4 kunnen we Log $\phi(t)$ schrijven als uniforme limiet (zie opm. na bewijs van st. 2.2.4):

$$(b) \qquad \text{Log } \phi(t) = \lim_{n\to\infty} n(\phi_n(t)-1) = \lim_{n\to\infty} n \int (e^{itx}-1)dF_n(x),$$

als $\phi_n=\phi^{1/n}$ en F_n de corresponderende verdelingsfunctie is. Om de representatie (a) te krijgen moeten we nu op de een of andere manier de limietovergang onder het integraalteken uitvoeren. Het is duidelijk dat dit niet direct gaat: nF_n is niet een zwak convergente rij in $\mathfrak{M}$. We moeten aan $n.dF_n$ nog een factor toevoegen die maakt dat de nieuwe maatfuncties wel zwak convergeren. De keuze

$$G_n(u) = n \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_n(x),$$

wordt gedeeltelijk gemotiveerd door het feit (st. 2.2.1) dat de F_n zwak naar de eenheidssprongfunctie ϵ convergeren, zodat in feite alleen voor x=0 compensatie nodig is. Dat $G_n \in \mathfrak{M}$, is triviaal. We zullen nu, met behulp van st. 2.1.2' bewijzen dat de rij $\{G_n\}$ voorwaardelijk compact is. Hiertoe gaan we uit van de relatie (b), die met de G_n, op grond van lemma 2.2.1, ook geschreven kan worden als

$$(c) \qquad I_n(t) = \int (e^{itu}-1) \frac{1+u^2}{u^2}\, d\, G_n(u) \to \text{Log } \phi(t).$$

Daaruit volgt

$$\text{Re } I_n(t) = \int (\cos tu-1) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG_n(u) \to \text{Re Log } \phi(t) = \log|\phi(t)|$$

Hieruit leiden we de volgende schattingen af *):

---

*) We maken gebruik van de elementaire ongelijkheden:

$$\frac{1-\cos u}{u^2} > \frac{1}{3} \text{ voor } |u| \leq 1 \text{ en } \frac{\sin u}{u} < \tfrac{1}{2} \text{ voor } |u| > 2.$$

$$A_n \overset{\text{def}}{=} \int_{|u|\leq 1} dG_n(u) \leq 3 \int (1-\cos u)\, \frac{1+u^2}{u^2}\, dG_n(u) = -\mathrm{Re}\, I_n(1) \leq -\log |\phi(1)| + \varepsilon$$

voor voldoend grote n.

$$B_n(T) \overset{\text{def}}{=} \int_{|u|>T} dG_n(u) \leq 2 \int_{\frac{2}{T}|u|>T} \left(1 - \frac{\sin 2uT^{-1}}{2uT^{-1}}\right) dG_n(u) =$$

$$= 2 \int_{|u|>T} dG_n(u) \cdot \frac{T}{2} \int_0^{\frac{2}{T}} (1-\cos tu)\,dt \leq$$

$$\leq T \int_0^{\frac{2}{T}} dt \int_{|u|>T} (1-\cos tu)\, \frac{1+u^2}{u^2}\, dG_n(u) = T \int_0^{\frac{2}{T}} (-\mathrm{Re}\, I_n(t))\,dt \leq$$

$$\leq -T \int_0^{\frac{2}{T}} \log |\phi(t)|\,dt + 2\varepsilon \leq 2 \cdot \max_{0\leq t\leq \frac{2}{T}} |\log |\phi(t)|| + 2\varepsilon ,$$

voor $T \geq 1$ en n voldoend groot (bij de 4^e ongelijkheid is gebruik gemaakt van de uniformiteit in (c)).
Dit geeft ten eerste dat

$$\int dG_n(u) = G_n(\infty) = A_n + B_n(1) \leq -\log |\phi(1)| + 3\varepsilon + 2 \cdot \max_{0\leq t\leq 2} |\log |\phi(t)|| ,$$

dus $\{G_n(\infty) \mid n=1,2,\ldots\}$ is begrensd. Verder is, voor T voldoend groot

$$B_n(T) \leq 2 \cdot \max_{0\leq t\leq \frac{2}{T}} |\log |\phi(t)|| + 2\varepsilon < 4\varepsilon ,$$

dus $B_n(T) \to 0$ voor $T \to \infty$ uniform in n. Op grond van st. 2.1.2' is dus de rij G_n voorwaardelijk compact. Kies dan, op grond daarvan een rij natuurlijke getallen $\{n_k\}$ zo dat de rij $\{G_{n_k}\}$ zwak convergent is:

(d) $$\lim_{k\to\infty} G_{n_k} = G,$$

waar $G \in \mathfrak{M}'$. Nu kan men nog geen limietovergang onder het integraalteken in (c) uitvoeren omdat de integrand in (c) niet continu in t=0 is. Daarom voeren we nog een term onder de integraal in, die de integrand we continu voor t=0 maakt:

$$I_n(t) = \int \{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\} \frac{1+u^2}{u^2} \, dG_n(u) + it\gamma_n,$$

met

$$\gamma_n = \int \frac{dG_n(u)}{u} = n \int \frac{x}{1+x^2} \, dF_n(x),$$

zodat geldt:

$$\text{Log } \phi(t) = \lim_{k\to\infty} I_{n_k}(t) = \lim_{k\to\infty} \left[\int \{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\} \frac{1+u^2}{u^2} \, dG_{n_k}(u) + it\gamma_{n_k} \right].$$

Omdat, volgens (d) en st. 2.1.2', de limiet van de eerste term tussen rechte haken bestaat, bestaat ook de limiet van de tweede term:

$\gamma_{n_k} \to \gamma$, dus

$$\text{Log } \phi(t) = \int \{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\} \frac{1+u^2}{u^2} \, dG(u) + it\gamma.$$

en hiermee is het "slechts dan" gedeelte van de stelling bewezen.
Hoewel het voor het bewijs van de stelling niet meer nodig is, is het van belang om nog op te merken dat men nu eenvoudig kan aantonen dat ook $\gamma_n \to \gamma$ en Lim $G_n = G$ is.

We bewijzen tenslotte dat de representatie (a) uniek is. Daartoe voeren we de functie

$$V(u) = 2 \int_{-\infty}^{u} (1 - \frac{\sin v}{v}) \cdot \frac{1+v^2}{v^2} \, dG(v)$$

in. V is monotoon niet dalend en $V(\infty) < \infty$, dus $V \in \mathfrak{M}'$. V is dus eenduidig bepaald door zijn karakteristieke functie

$$\psi(t) = \int e^{itu} \, dV(u) = 2 \int e^{itu} (1 - \frac{\sin u}{u}) \frac{1+u^2}{u^2} \, dG(u) =$$

$$= 2 \text{ Log } \phi(t) - 2 \int \left[e^{itu} \cdot \frac{\sin u}{u} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right] \frac{1+u^2}{u^2} \, dG(u) - 2i\gamma t =$$

$$= 2 \text{ Log } \phi(t) - 2 \int_{t-1}^{t+1} \text{Log } \phi(z) dz.$$

G is weer eenduidig bepaald door V (lemma 2.2.1), zodat G eenduidig bepaald is door ϕ. Hiermee is de stelling bewezen.

Gevolg 1. Als de logarithme van een karakteristieke functie ψ voorge-

steld kan worden als in (a), waar G nu een functie van begrensde variatie mag zijn, dan zijn G en γ eenduidig door ψ bepaald.

Bewijs.

Veronderstel dat Log $\psi(t)$ twee representaties (γ_1, G_1) en en (γ_2, G_2) van de vorm (a) heeft. Zij G_i^+ de positieve en G_i^- de negatieve variatie van G_i $(i=1,2)$ (zie de splitsingsstelling van Jordan, S 295 st. 2.4.3 op pag. 141) en laat $h(t,u)$ de integrand in (a) voorstellen. Dan is

$$\text{Log } \psi(t) = i\gamma_1 t + \int h(t,u)dG_1^+(u) - \int h(t,u)dG_1^-(u) =$$

$$= i\gamma_2 t + \int h(t,u)dG_2^+(u) - \int h(t,u)dG_2^-(u),$$

dus

$$i\gamma_1 t + \int h(t,u)d(G_1^+(u) + G_2^-(u)) = i\gamma_2 t + \int h(t,u)d(G_2^+(u) + G_1^-(u)).$$

Toepassing van het laatste deel van de voorgaande stelling geeft nu onmiddellijk

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

en

$$G_1^+ + G_2^- = G_2^+ + G_1^- \text{ , dus } G_1 = G_2.$$

Gevolg 2: representatie van Lévy.

Men kan een verwante representatie (ook uniek) vinden, door te stellen

$$M(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \text{ voor } u < 0,$$

$$N(u) = -\int_{u}^{\infty} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x), \text{ voor } u > 0$$

$$\sigma^2 = G(0+) - G(0-).$$

De representatie (a) gaat dan over in de representatieformule van Lévy:

$$\log \phi(t) = i\gamma t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \left| \int_{-\infty}^{0} dM(u) + \int_{0}^{\infty} dN(u) \right| \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}\right).$$

Omgekeerd kan men onmiddellijk in zien dat ieder drietal (M,N,σ^2) dat voldoet aan

(1) $\qquad 0 < \sigma^2 < \infty;$

(2) M is niet afnemend op $(-\infty,0)$; $M(-\infty)=0$;
N is niet afnemend op $(0,\infty)$; $N(\infty)=0$;

(3) $\forall \varepsilon>0 \quad \int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN(u) < \infty;$

precies een $G \in \mathfrak{M}'$ bepaalt (lemma 2.2.1):

$$G(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dM(x) \quad \text{voor} \quad u < 0,$$

en

$$G(u) = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^2}\, dM(x) + \sigma^2 + \int_{0}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dN(x) \quad \text{voor } u > 0.$$

Gevolg 3. Men kan bovenstaande formule van Lévy ook nog in de volgende vorm brengen:

$$\text{Log } \phi(t) = i\gamma(\tau).t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \left[\int_{-\infty}^{-\tau} dM(u) + \int_{\tau}^{\infty} dN(u)\right](e^{iut}-1) +$$

$$+ \left[\int_{-\tau}^{0} dM(u) + \int_{0}^{\tau} dN(u)\right](e^{iut}-1-iut),$$

waarin M,N en σ dezelfde zijn als in de representatie van Lévy (gevolg 2), terwijl τ een continuïteitspunt van N en $-\tau$ een continuïteitspunt van M is; hier is

$$\gamma(\tau) = \gamma - \left[\int_{-\infty}^{-\tau} dM(u) + \int_{\tau}^{\infty} dN(u)\right]\left(\frac{u}{1+u^2}\right) +$$

$$+ \left[\int_{-\tau}^{0} dM(u) + \int_{0}^{\tau} dN(u)\right]\left(\frac{u^3}{1+u^2}\right) =$$

$$= \gamma - \int_{|u|\leq\tau} \frac{1}{u}\, dG(u) + \int_{|u|\geq\tau} u\, dG(u).$$

Gevolg 4. Kolmogorov's representatie in het geval van eindige variantie.

In het geval van eindige variantie is in de definitie van $G_n(u)$ (bewijs

van st. 2.2.5) de factor $1+x^2$ in de noemer overbodig, omdat die factor alleen is aangebracht om convergentie van

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_n(x)$$

te waarborgen. We mogen dus verwachten een eenvoudiger representatie te vinden als we in dit geval de functie

$$K(u) = \int_{-\infty}^{u} (1+x^2)\, dG(x)$$

invoeren. Inderdaad krijgen we dan

$$\text{Log } \phi(t) = i\gamma t + \int \{e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\} \frac{1}{u^2}\, dK(u) =$$

$$= i\gamma t + \int (e^{itu} - 1 - itu)\, \frac{1}{u^2}\, dK(u) + \int (itu - \frac{itu}{1+u^2})\, dK(u)$$

$$= i\gamma' t + \int (e^{itu} - 1 - itu)\, \frac{1}{u^2}\, dK(u),$$

met $\gamma' = \gamma + \int \frac{u\, dK(u)}{1+u^2}$.

Men ziet gemakkelijk in dat deze representatie weer uniek is. Verder is ($\underline{x}$ is de bij ϕ horende stochastische variabele):

$$\mathcal{E}\underline{x} = i^{-1} \frac{d}{dt} \log \phi(0) = \gamma' \text{ en } \sigma^2(\underline{x}) = -\frac{d^2}{dt^2} \log \phi(0) = +\int dK(u) = K(\infty).$$

Naar de representatieformules in st. 2.2.5, gevolg 2,3,4 zullen we in het vervolg verwijzen met respectievelijk de formule van Lévy-Khintchine, de 1e formule van Lévy, de tweede formule van Lévy en de formule van Kolmogorov.

Voorbeelden.

Bij een normale verdeling $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}\, du$ is in representatie (a) $\gamma=a$ en $G=\sigma^2 . \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ eenheidssprongfunctie); in de Lévy representatie $\gamma=a$, $M=0$, $N=0$, $\sigma=\sigma$; in de Kolmogorov representatie $\gamma'=a$, $K=\sigma^2 . \mathcal{L}$.

Voor een Poisson variabele $\underline{x}$ met karakteristieke functie

$$\phi_{\underline{x}}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

wordt de representatie (a):

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}\ ,\ G(x) = \frac{\lambda}{2}\,\mathcal{L}(x-1),$$

en de Lévy-representatie

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}\ ,\ \sigma = 0,\ M = 0,\ N = -\lambda.\mathcal{L}(1-x),$$

en de Kolmogorov-representatie

$$\gamma = \lambda,\ K = \lambda.\mathcal{L}(x-1).$$

Cauchy verdeling: $F(x)= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x-b}{a}\right)$ $(a>0)$;

$$\phi(t)= e^{ibt-a|t|}.$$

voor de verdelingsfuncties F_n uit het bewijs van st. 2.2.5 geldt nu

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x-b/n}{a/n}\right),$$

dus

$$G_n(u)=n\int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{n/a}{1+\left(\frac{x-b/n}{a/n}\right)^2}\,dx =$$

$$= a\int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{a^2/n^2+(x-b/n)^2} \to a\int_{-\infty}^{u}\frac{dx}{1+x^2} = a\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} u\right).$$

De laatste limietovergang is gerechtvaardigd omdat de integrand buiten iedere omgeving van x=0 uniform naar $\frac{1}{1+x^2}$ convergeert, terwijl de integrand in een omgeving van x=0 uniform in n begrensd is. Men kan de van n afhankelijke integraal voor γ_n expliciet uitrekenen (bv. met de residustelling) en dan de limietovergang uitvoeren. Dan blijkt

$$\gamma_n = n\int\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{n}{a}\cdot\frac{dx}{1+\left(\frac{x-b/n}{a/n}\right)^2} = a\int\frac{x}{1+x^2}\,\frac{dx}{(a/n)^2+(x-b/n)^2} \to \pi b,$$

zodat geldt

$$\operatorname{Log}\phi(t) = i\pi bt + a\int\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}.$$

Convergentiecriteria

St. 2.2.6. Voor de zwakke convergentie van een rij oneindig deelbare verdelingsfuncties $\{F_n\}$, met Lévy-Khintchine representaties $\{\gamma_n, G_n\}$, naar een verdeling F, is nodig en voldoende dat er een reële γ en een $G \in \mathfrak{M}$ is, zodat (γ, G) de Lévy-Khintchine representatie van F is en zo dat

$$\gamma_n \to \gamma, \quad \lim_{n \to \infty} G_n = G$$

Bewijs

"nodig". Laat $\lim F_n = F$ zijn en noem de karakteristieke functies van F_n en F respectievelijk ϕ_n en ϕ. Dan geldt, volgens St. 2.2.2, dat F en ϕ oneindig deelbaar zijn, zodat ϕ_n en $\phi \neq 0$ zijn, terwijl $\phi_n \to \phi$. Dus

$$(e) \quad \operatorname{Log} \phi_n(t) = i\gamma_n t + \int (e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}) \frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u) \to \operatorname{Log} \phi(t),$$

dus

$$\int (\cos ut - 1) \frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u) = \operatorname{Re} \operatorname{Log} \phi_n(t) \to \operatorname{Re} \operatorname{Log} \phi(t).$$

Op dezelfde manier als in het bewijs van st. 2.2.5 volgt hieruit dat de rij $\{G_n\}$ voorwaardelijk compact is. Kies dan een zwak convergente deelrij G_{n_k}, met $\lim_{k \to \infty} G_{n_k} = G^*$, dan geldt

$$\int (e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}) \frac{1+u^2}{u^2} dG_{n_k}(u) \to \int (e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2}) \frac{1+u^2}{u^2} dG^*(u).$$

Uit (e) volgt dan direct dat γ_{n_k} ook convergeert, zeg naar γ^*. Dan volgt weer uit (e) dat dan (γ^*, G^*) de Lévy-Khinchine representatie van $\phi(t)$ is. Dus $\gamma^* = \gamma$, $G^* = G$.

Veronderstel dat niet geldt $\lim_{n \to \infty} G_n = G$. Dan is er een continuïteitspunt u van G, zodat $G_n(u)$ niet naar $G(u)$ convergeert. $\{G_n(u)\}$ heeft dan tenminste één van $G(u)$ verschillend verdichtingspunt z_0. Kies een deelrij $\{m_k\}$ zo, dat $G_{m_k}(u)$ convergeert naar z_0. Pas dan het bovenbeschreven procédé op de rij F_{m_k} toe. Dan vinden we een deelrij $\{h_k\}$ van $\{m_k\}$ zo dat G_{h_k} zwak convergeert naar G, in strijd met

$\lim_{k\to\infty} G_{h_k}(u)=z_0\neq G(u)$. Dus $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} G_n=G$ en dus ook $\gamma_n \to \gamma$. Daarmee is het eerste deel van de stelling bewezen.

"voldoende". Als $\gamma_n \to \gamma$ en $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} G_n=G$, dan volgt onmiddellijk uit de representatie formule van Lévy-Khintchine dat

$$\operatorname{Log} \phi_n(t) \to \operatorname{Log} \phi(t),$$

zodat uit st. 2.2.1 en st. 2.1.1 volgt (ϕ is karakteristieke functie, dus continu in 0)

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} F_n = F.$$

Het is gemakkelijk om ook convergentiecriteria te hebben voor de Lévy-2 representatie en de Kolmogorov representatie.
In het bewijs van de betreffende stellingen hebben we herhaaldelijk het volgende lemma nodig:

<u>lemma 2.2.2.</u> $F_n \in \mathcal{M}'$ $(n=1,2,\ldots)$; F_n convergeert zwak naar $F \in \mathcal{M}'$.

a) Voor iedere begrensde continue functie f geldt, voor alle continuïteitspunten u van F

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{u} f(x)dF_n(x)= \int_{-\infty}^{u} f(x)dF(x)$$

b) Voor alle continue functies geldt, voor alle continuïteitspunten u_1 en u_2 van F waarvoor $-\infty < u_1 < u_2 < \infty$ dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_{u_1}^{u_2} f(x)dF_n(x)= \int_{u_1}^{u_2} f(x)dF(x).$$

<u>Bewijs.</u> Het bewijs van a) en b) is vrijwel hetzelfde. We bewijzen alleen a):
Zij u continuïteitspunt van F. Definiëer de functie $\overline{f}$ door

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } x \leq u \\ f(u) & \text{voor } x \geq u \end{cases}$$

Dan is $\overline{f}(x)$ een begrensde continue functie. Op grond van st. 2.1.1 is dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x)dF(x),$$

dus (u is cont. punt):

$$\int_{-\infty}^{u} f(x)dF_n(x)+f(u)\left[F_n(+\infty)-F_n(u)\right] \to \int_{-\infty}^{u} f(x)dF(x)+f(u)\left[F+\infty)-F(u)\right].$$

Uit Lim $F_n=F$, volgt dan nog $F_n(+\infty) \to F(+\infty)$ en $F_n(u) \to F(u)$,

zodat

$$\int_{-\infty}^{u} f(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{u} f(x)dF(x).$$

St. 2.2.7. Voor de zwakke convergentie van een rij oneindig deelbare verdelingen $\{F_n\}$ met 2^e Lévy-representatie $\{M_n,N_n,\sigma_n,\gamma_n(\tau)\}$ naar een verdeling F is nodig en voldoende dat er een stelsel $\{M,N,\sigma,\gamma(\tau)\}$ gevonden kan worden dat F representeert, zodat

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{Lim } M_n = M; \quad \text{Lim } N_n = N, \\ \gamma_n(\tau) \to \gamma(\tau) \end{cases}$$

en

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM_n(u)+\sigma_n^2+ \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN_n(u) \right\} =$$

$$(2) \qquad = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \to \infty} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM_n(u)+\sigma_n^2 + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN_n(u) \right\} = \sigma^2.$$

Bewijs.

"noodzakelijk". Zij Lim $F_n=F$ en laat $\{\gamma_n,G_n\}$ resp. $\{\gamma,G\}$ de Lévy-Khintchine representaties van F_n resp F zijn. Op grond van st. 2.2.6 is dus

$$\gamma_n \to \gamma$$

en

$$\text{Lim}_{n\to\infty} G_n = G$$

Dus, voor de 2e Lévy-representaties *):

---

*) Als in deze paragraaf een index n tussen haakjes geplaatst is, geldt de betreffende bewering of formule zowel met als zonder deze index.

$$M_{(n)}(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG_{(n)}(z) \qquad (u<0)$$

$$N_{(n)}(u) = -\int_{u}^{\infty} \frac{1+z^2}{z^2}\, dG_{n}(z) \qquad (u>0)$$

$$\sigma^2_{(n)} = dG_{(n)}(0)$$

$$\gamma_{(n)}(\tau) = \gamma_{(n)} + \int_{|u|<\tau} u\, dG_{(n)}(u) - \int_{|u|\geq\tau} \frac{1}{u}\, dG_{(n)}(u),$$

geldt, op grond van lemma 2.2.2

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} M_n = M, \quad \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} N_n = N \text{ en } \gamma_n(\tau) \to \gamma(\tau).$$

Om de noodzakelijkheid van voorwaarde (2) aan te tonen, merken we eerst op dat

$$H_{(n)}(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM_{(n)}(u) + \sigma^2_{(n)} + \int_{0}^{\varepsilon} u^2 dN_{(n)}(u) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (1+u^2) dG_{(n)}(u),$$

zoals men onmiddellijk uit de definities van $M_{(n)}, \sigma_{(n)}$ en $N_{(n)}$ kan afleiden. Als nu ε en $-\varepsilon$ continuïteitspunten van G zijn dan geldt volgens lemma 2.2.2.

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\varepsilon) = H(\varepsilon).$$

Als $\pm\varepsilon$ niet beide continuïteitspunten van G zijn, dan zijn er getallen ε' en ε'' met $0 < \varepsilon' < \varepsilon < \varepsilon''$ zodat $\pm\varepsilon'$ en $\pm\varepsilon''$ wel continuïteitspunten van G zijn. Dan volgt direct dat

$$H(\varepsilon') \leq \liminf_{n\to\infty} H_n(\varepsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} H_n(\varepsilon) \leq H(\varepsilon'').$$

Als $\varepsilon \downarrow 0$ kan men rijen ε' en ε'' waarvoor $\varepsilon' \downarrow 0$, $\varepsilon'' \downarrow 0$ vinden zodanig dat steeds $\pm\varepsilon'$ en $\pm\varepsilon''$ continuïteitspunten van G zijn. Uit $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} H(\varepsilon) = \sigma^2$ volgt dan (2).

"voldoende". We zullen aantonen dat Lim $G_n = G$ en $\gamma_n \to \gamma$.
Als $u < 0$ en u is een continuïteitspunt van G (dus van M), dan is volgens lemma 2.2.2:

$$\lim_{n\to\infty} G_n(u) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dM_n(x) = \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dM(x) = G(u).$$

Hieruit volgt, met dezelfde redenering als in het vorige deel van het bewijs:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} G_n(-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} G_n(-\varepsilon) = G(-0).$$

Verder is

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} H_n(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \int_{|u|\le\varepsilon} dG_n(u)(1+u^2) \le G_n(+\varepsilon) - G_n(-\varepsilon) \le H_n(\varepsilon).$$

Zodat uit (2) volgt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} (G_n(+\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} (G_n(+\varepsilon) - G_n(-\varepsilon)) = \sigma^2 = G(+0) - G(-0),$$

dus

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} G_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} G_n(\varepsilon) = G(+0).$$

Als nu $\varepsilon > 0$ en $u > 0$ continuïteitspunten van $G(u)$ zijn, dan is

$$G_n(u) = G_n(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dN_n(x),$$

zodat voor alle continuïteitspunten ε van $G(u)$ geldt (weer met gebruikmaking van lemma 2.2.2):

$$\limsup_{n\to\infty} G_n(u) = \limsup_{n\to\infty} G_n(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dN(u).$$

$$= \limsup_{n\to\infty} G_n(\varepsilon) + G(u) - G(\varepsilon).$$

Laat $\varepsilon \downarrow 0$ door de continuïteitspunten van G, dan volgt:

$$\limsup_{n\to\infty} G_n(u) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} G_n(\varepsilon) + G(u) - G(\varepsilon) = G(u).$$

Op dezelfde manier bewijst men

$$\liminf_{n\to\infty} G_n(u) = G(u).$$

Dus

$$\lim G_n(u) = G(u)$$

in alle continuïteitspunten van G. De convergentie $G_n(+\infty) \to G(+\infty)$ volgt nu direct uit Lim N_n=N. Tenslotte volgt $\gamma_n \to \gamma$ uit $\gamma_n(\tau) \to \gamma(\tau)$.

St. 2.2.8. Voor de zwakke convergentie van een rij oneindig deelbare verdelingen $\{F_n\}$ met eindige varianties σ_n^2 naar een limietverdeling F met eindige variantie σ^2 en voor $\sigma_n \to \sigma$ is nodig en voldoende dat voor de Kolmogorov-representaties $\{K_n, \gamma_n\}$ resp. $\{K, \gamma\}$ van F_n resp. F geldt

$$\begin{aligned} &\text{Lim } K_n = K \\ &\quad \gamma_n \to \gamma. \end{aligned}$$

Bewijs.

"voldoende". Analoog met het "voldoende" bewijs is st. 2.2.6.

"nodig". Veronderstel Lim F_n=F en $\sigma_n \to \sigma$. Laten $\{G_n, \gamma_n'\}$ resp. $\{G, \gamma'\}$ de Lévy-Khintchine representaties van F_n, resp. F zijn. Uit st. 2.2.6 volgt dat

$$\text{Lim } G_n = G$$

en

$$\gamma_n' \to \gamma',$$

terwijl

$$K_{(n)}(u) = \int_{-\infty}^{u} (1+x^2)\,dG_{(n)}(x) \quad \text{en} \quad K_{(n)}(\infty) = \sigma_{(n)}^2 ,$$

zodat uit lemma 2.2.2 volgt dat voor alle continuïteitspunten u_1 en u_2 van K geldt

$$K_n(u_2) - K_n(u_1) \to K(u_2) - K(u_1).$$

Verder is

$$\lim_{n\to\infty} K_n(+\infty) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 = K(+\infty).$$

Dus ook, voor continuïteitspunten $u_1 < u_2$ van K:

$$K_n(u_1) + K_n(+\infty) - K_n(u_2) \to K(u_1) + K(+\infty) - K(u_2).$$

Daaruit volgt dat geldt

$$\lim_{u \to -\infty} \lim_{n \to \infty} K_n(u) = 0,$$

als u continuïteitspunten van K door loopt. Immers kies u zo dat $K(u) < \frac{1}{3}\varepsilon$ en dan u' zo dat $K(+\infty)-K(u') < \frac{1}{3}\varepsilon$ en tenslotte n zo groot dat

$$K_n(u)+K_n(+\infty)-K_n(u') < K(u)+K(+\infty)-K(u')+ \frac{1}{3}\varepsilon \quad .$$

Dan volgt dat

$$K_n(u) < \varepsilon .$$

Daaruit leiden we af dat $K_n(u) \to K(u)$ in alle continuïteitspunten van K: Laat -R continuïteitspunt van K zijn met

$$K(-R) < \tfrac{1}{4}\varepsilon \quad \text{en} \quad \lim_{n \to \infty} K_n(-R) < \tfrac{1}{4}\varepsilon \ .$$

Bepaal eerst n_0 zo dat voor $n > n_0$ $K_n(-R) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dan is

$$|K_n(u)-K(u)| \leq |(K_n(u)-K_n(-R))-(K(u)-K(-R))| + K_n(-R)+K(-R).$$

Bepaal dan n_1 zo dat voor $n > n_1$ de eerste term in het rechterlid $< \frac{1}{4}\varepsilon$ is, dan volgt dat voor $n > \max(n_0, n_1)$

$$|K_n(u)-K(u)| < \varepsilon$$

is. Daaruit volgt dus dat K_n zwak naar K convergeert en uit de limietrelatie

$$i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx}-1-itx) \frac{dK_n(x)}{x^2} \to i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx}-1-itx) \frac{dK(x)}{x^2}$$

volgt dan direct $\gamma_n \to \gamma$. Daarmee is de stelling bewezen.

2.3. Algemene limietstellingen

In deze paragraaf beschouwen we steeds een stelsel stochastische variabelen

$$(1)\qquad \begin{array}{l} \underline{x}_{11}, \underline{x}_{12}, \ldots, \underline{x}_{1k_1}; \\ \underline{x}_{21}, \underline{x}_{22}, \ldots, \underline{x}_{2k_2}; \\ \vdots \\ \underline{x}_{n1}, \underline{x}_{n2}, \ldots, \underline{x}_{nk_n}; \\ \vdots \end{array}$$

waarbij de op één rij vermelde variabelen telkens onderling onafhankelijk zijn. De verdelingsfunctie van $\underline{x}_{nk}$ wordt met F_{nk} aangeduid en de karakteristieke functie met ϕ_{nk}; voor de gereduceerde variabelen

$$(2)\qquad \tilde{\underline{x}}_{nk} \overset{\text{def}}{=} \underline{x}_{nk} - \underline{x}_{nk}$$

zijn dit resp. $\tilde{F}_{nk}$ en $\tilde{\phi}_{nk}$. In uitdrukkingen als $\sup_k$, $\sum_k$ e.d. is stilzwijgend verondersteld $k \in \{1,2,\ldots,k_n\}$.

Men kan zich nu afvragen, welke verdelingen kunnen optreden als limiet voor $n \to \infty$ van de verdeling van

$$(3)\qquad \underline{z}_n \overset{\text{def}}{=} \sum_k \underline{x}_{nk}.$$

Wanneer we geen nadere beperkingen opleggen kan iedere verdelingsfunctie $F(x)$ als limietverdeling optreden: geef n.l. voor elke n $\underline{x}_{n1}$ de verdelingsfunctie $F(x)$ en laat alle andere stochastische variabelen identiek nul zijn. Van nu af zullen we eisen dat $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ is en dat er in de som $\underline{z}_n$ geen termen voorkomen die de overige termen overheersen. Dit laatste wordt gepreciseerd in de volgende definitie.

Def. 2.3.1. De stochastische variabelen $\underline{x}_{nk}$ heten **oneindig klein** [1],

---

[1] "infinitesimal" (Gnedenko-Kolmogorov); "uniformly asymptotically negligible" (Loève); "vanishingly small" (Robinson).

als voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k P\{|\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Zij heten <u>asymptotisch constant</u>, als er constanten a_{nk} bestaan zo dat $\underline{x}_{nk}-a_{nk}$ oneindig klein zijn.

<u>Lemma 2.3.1.</u> Als $\underline{x}_{nk}$ asymptotisch constant zijn, kan men voor de constanten a_{nk} in bovenstaande definitie medianen m_{nk} van $\underline{x}_{nk}$ kiezen.

<u>Bewijs</u>

Volgens de definitie bestaan er a_{nk} zo dat bij elke $\varepsilon > 0$ voor voldoend grote n geldt

$$\sup_k P\{|\underline{x}_{nk}-a_{nk}|>\varepsilon\} < \tfrac{1}{2},$$

dus voor elke k

$$P\{|\underline{x}_{nk}-a_{nk}|\leq\varepsilon\} > \tfrac{1}{2}.$$

Dit houdt in dat elke mediaan m_{nk} moet liggen in $(a_{nk}-\varepsilon, a_{nk}+\varepsilon)$.
Dus $\sup_k |m_{nk}-a_{nk}| < \varepsilon$, waaruit het gestelde volgt.

<u>Lemma 2.3.2.</u> $\underline{x}_{nk}$ zijn dan en slechts dan oneindig klein als

$$\sup_k \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

<u>Bewijs</u>

$$\sup_k \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \geq \sup_k \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \geq \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \sup_k P\{|x_{nk}|\geq\varepsilon\}$$

impliceert de bewering "dan"; "slechts dan" is juist omdat voor $0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2}$ en voldoend grote n geldt

$$\sup \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) \leq \sup \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \sup \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 + \sup P\{|\underline{x}_{nk}|\geq\varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

<u>Lemma 2.3.3.</u> $\underline{x}_{nk}$ zijn dan en slechts dan oneindig klein als uniform op elk eindig interval $\sup_k |\phi_{nk}(t)-1| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Bewijs

"slechts dan": $\sup_k |\phi_{nk}(t)-1| \leq \sup_k \left(\int_{|x|<\varepsilon} + \int_{|x|\geq\varepsilon} \right) |e^{itx}-1| dF_{nk}(x) \leq$

$$\leq \varepsilon |t| + 2 \sup_k P\{|\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\}.$$

"dan": voor elke $\varepsilon > 0$ en $\tau > \varepsilon^{-1}$ geldt

$$(4) \qquad P\{|\underline{x}_{nk}| \leq \varepsilon\} \geq \frac{\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \{\phi_{nk}(t)-1\}dt+1 \right| - \frac{1}{\tau\varepsilon}}{1-\frac{1}{\tau\varepsilon}},$$

want

$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \phi_{nk}(t)dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \, dF_{nk}(x) \right| =$$

$$= \left| \left(\int_{|x|\leq\varepsilon} + \int_{|x|>\varepsilon} \right) \frac{\sin \tau x}{\tau x} dF_{nk}(x) \right| \leq P\{|\underline{x}_{nk}| \leq \varepsilon\} + \frac{1}{\tau\varepsilon}(1-P\{|\underline{x}_{nk}|\leq\varepsilon\}).$$

Uit het gegeven van het lemma blijkt dat de integrand in het rechterlid van (4) uniform voor $t \in (-\tau, \tau)$ naar nul convergeert. Voor vaste τ is de integrand uniform in n in absolute waarde begrensd door 2. Dus volgens st. 2.2.9 van S 295 (blz. 122, gemajoreerde convergentie) is bij elke $\delta > 0$ voor voldoend grote n

$$\sup_k \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \{\phi_{nk}(t)-1\}dt \right| < \delta,$$

dus wegens (4) geldt

$$\inf_k P\{|\underline{x}_{nk}| \leq \varepsilon\} \geq \frac{-\delta+1-\frac{1}{\tau\varepsilon}}{1-\frac{1}{\tau\varepsilon}} = 1-\frac{\delta}{1-\frac{1}{\tau\varepsilon}}.$$

Door eerst τ voldoende groot en dan δ voldoende klein te kiezen kan de tweede term van het rechterlid bij elke gegeven ε willekeurig klein worden gemaakt. Dus voldoen de variabelen $\underline{x}_{nk}$ aan def. 2.3.1.

St. 2.3.1. (Bawly). De rij verdelingsfuncties van de sommen

$$(5) \qquad \underline{x}_n = \underline{x}_{n1} + \underline{x}_{n2} + \ldots + \underline{x}_{nk_n} - A_n,$$

met constanten A_n en bij vaste n onderling onafhankelijke stochastische

variabelen $\underline{x}_{nk}$ die voldoen aan

(6) $\tilde{\underline{x}}_{nk}$ zijn oneindig klein, dus $\sup_k P\{|\tilde{\underline{x}}_{nk}| \geq \varepsilon\} \to 0$ $(n \to \infty$, alle $\varepsilon)$

en

(7) voor alle n is var $\underline{s}_n \leq C$,

convergeert dan en slechts dan als de volgende "begeleidende verdelingen" een convergente rij vormen. Deze begeleidende verdelingen, die oneindig deelbaar zijn en in verwachting en variantie met $\underline{s}_n$ overeenstemmen, hebben karakteristieke functies $\psi_n(t)$ bepaald door

$$(8) \quad \text{Log } \psi_n(t) = -iA_n t + \sum_k \{it \mathcal{E} \underline{x}_{nk} + \int (e^{itx}-1)\, d\tilde{F}_{nk}(x)\} ,$$

en beide rijen verdelingsfuncties hebben dezelfde limiet.

Bewijs

Als ϕ_n de karakteristieke functie van $\underline{s}_n$ is, geldt volgens (2) en (5)

$$(9) \quad \phi_n(t) = e^{-itA_n} \prod_k \phi_{nk}(t) = e^{-itA_n + it \sum_k \mathcal{E} \underline{x}_{nk}} \prod_k \tilde{\phi}_{nk}(t) .$$

Voor $\alpha_{nk}(t) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\phi}_{nk}(t)-1$ geldt volgens (6) en lemma 2.3.3:

(10) $\sup_k |\alpha_{nk}(t)| \to 0$ $(n \to \infty$, uniform in elk eindig interval van t).

We beperken ons nu tot een willekeurig maar vast gekozen eindig interval voor t en tot zo grote n dat geldt

$$\sup_k |\alpha_{nk}(t)| < \tfrac{1}{2} .$$

Wegens (10) is verder $\lim_{n\to\infty} \tilde{\phi}_{nk}(t)=1$, dus Log $\phi_n(t)$ is gedefinieerd, zie ook (9).

Nu is

$$|\alpha_{nk}(t)| = |\int (e^{itx}-1) d\tilde{F}_{nk}(x)| = |\int (e^{itx}-1-itx) d\tilde{F}_{nk}(x)| \leq$$

$$\leq \frac{t^2}{2} \int x^2 d\tilde{F}_{nk}(x) = \frac{t^2}{2} \text{ var } \underline{x}_{nk} .$$

Dus is

$$|\text{Log } \phi_n(t)-\text{Log } \psi_n(t)|=|\sum_k\{\log \tilde{\phi}_{nk}(t)-\alpha_{nk}(t)\}| \leq$$

$$\leq \sum_k |\log (1+\alpha_{nk}(t))-\alpha_{nk}(t)|= \sum_k \sum_{m=2}^{\infty} \frac{|\alpha_{nk}(t)|^m}{m} \leq$$

$$\leq \sum_k \frac{|\alpha_{nk}(t)|^2}{2(1-|\alpha_{nk}(t)|)} < \sum_k |\alpha_{nk}(t)|^2 \leq$$

$$\leq \sup_k |\alpha_{nk}(t)| \frac{t^2}{2} \sum_k \text{var } \underline{x}_{nk} \leq \frac{Ct^2}{2} \sup |\alpha_{nk}(t)|.$$

De laatste uitdrukking convergeert voor $n \to \infty$ naar nul en wel uniform op het gekozen eindige interval van t. Convergentie van de rij verdelingen van $\underline{s}_n$ resp. van de rij begeleidende verdelingen bepaald door (8) is volgens st. 2.1.1 equivalent met de uniforme convergentie van de rij $\phi_n(t)$ resp. $\psi_n(t)$ op elk eindig interval. Hiermee is de "dan en slechts dan" bewering bewezen en de gelijkheid van de limieten. Voer nu in

$$(11) \qquad K_n(u) \overset{\text{def}}{=} \sum_k \int_{-\infty}^{u} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x);$$

waar $K_n(\infty) = \text{var } \underline{s}_n \leq C$ is volgens (7), dan is

$$(12) \qquad \text{Log } \psi_n(t) = it \left(\sum_k \tilde{\underline{x}}_{nk} - A_n \right) + \int (e^{itu}-1-itu) \frac{1}{u^2} dK_n(u).$$

Dus ψ_n is oneindig deelbaar (Kolmogorov's representatie, blz. 59-60) en lim ψ_n ook wegens st. 2.2.2. De variantie van de "begeleidende verdeling" met karakteristieke functie $\psi_n(t)$ is blijkbaar $K_n(\infty)$= var $\underline{s}_n$.

<u>St. 2.3.2.</u> (Gnedenko) Als de stochastische variabelen $\tilde{\underline{x}}_{nk}$ oneindig klein zijn, dan zijn de volgende beweringen equivalent:

a) de rij verdelingsfuncties van de in (5) gedefiniëerde stochastische variabelen $\underline{s}_n$ is zwak convergent naar een verdeling met variantie σ^2 en $\lim_{n\to\infty} \text{var } \underline{s}_n = \sigma^2$;

b) er bestaat een functie $K \in \mathfrak{M}'$ zodat de in (11) gedefiniëerde functies $K_n(u)$ voldoen aan Lim $K_n(u)=K(u)$.

Voor de constanten A_n mag men kiezen

$$(13) \qquad A_n = \sum_k^{\prime} \mathrm{E}\, \underline{x}_{nk} - \gamma + o(1) \quad (n \to \infty)$$

waar γ een willekeurige constante is; de limietverdeling heeft een karakteristieke functie met Kolmogorov-representatie met deze γ en $K(u)$.

Bewijs

b $\Rightarrow$ a: Wegens $\lim_{n\to\infty} K_n(u) = K(u)$ is $K_n(\infty)$ begrensd. Dus is aan (6) en (7) voldaan en geldt st. 2.3.1. De begeleidende karakteristieke functies beschreven in (12) convergeren dan en slechts dan als $\gamma_n = \sum_k^{\prime} \mathrm{E}\, \underline{x}_{nk} - A_n$ naar een constante γ convergeren en $K_n(u)$ zwak naar $K(u)$ (st. 2.2.8). De convergentie van de varianties volgt direct uit $K_n(\infty) \to K(\infty)$.

a $\Rightarrow$ b: De convergentie van de varianties impliceert (7). Dus de karakteristieke functies (12) convergeren op grond van st. 2.3.1. Pas nu st. 2.2.8 toe.

St. 2.3.3. De volgende twee beweringen zijn equivalent:

a) de rij verdelingsfuncties van $\underline{s}_n$ (5) convergeert zwak naar de standaardnormale verdeling, $\tilde{\underline{x}}_{nk}$ zijn oneindig klein en lim var $\underline{s}_n = 1$;

b) voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt voor $n \to \infty$

$$(14) \qquad \sum_k \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x) \to 0$$

en

$$(15) \qquad \sum_k \int_{|x| < \varepsilon} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x) \to 1.$$

De constanten A_n zijn $\sum_k^{\prime} \mathrm{E}\, \underline{x}_{nk} + o(1)$ $(n \to \infty)$.

Bewijs

b $\Rightarrow$ a: Wegens

$$\sup_k P\{|\tilde{\underline{x}}_{nk}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_k \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x)$$

volgt uit (14) dat $\tilde{x}_{nk}$ oneindig klein zijn. Kolmogorov's representatie voor de N(0;1) verdeling is volgens par. 2.2 (blz. 60) $\gamma = 0$, $K(u) = 0$ voor $u < 0$, $K(u) = 1$ voor $u > 0$. Pas nu st. 2.3.2 toe; de voorwaarde $\lim_{n\to\infty} K_n(u) = K(u)$ betekent hier

$$(16) \qquad \sum_k \int_{-\infty}^{u} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x) \to \begin{cases} 0 & \text{als } -\infty \leq u < 0; \\ 1 & \text{als } 0 < u \leq \infty. \end{cases}$$

a $\Rightarrow$ b: Uit st. 2.3.2 volgt direct (16), dus (14) en (15).

Speciale gevallen: Als voor elke n gegeven is var $s_n = 1$, kan in deze stelling voorwaarde (15) worden weggelaten. Als bovendien voor alle n en k geldt $\mathcal{E}\, x_{nk} = 0$ staat in (14) F_{nk} i.p.v. $\tilde{F}_{nk}$. Dus volgt uit st. 2.3.3 de bekende

St. 2.3.4. (Lindeberg-Feller). Gegeven is een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen y_k met verdelingsfuncties G_k en eindige varianties σ_k en verwachtingen μ_k, waarbij

$$\sigma^2(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Dan zijn de volgende twee beweringen equivalent:

a) de rij verdelingsfuncties van

$$(17) \qquad u_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - \mu_k}{\sigma(n)}$$

convergeert zwak naar de standaard-normale verdelingsfunctie, var $u_n \to 1$ en de termen van de som zijn oneindig klein:

b) voor elke $\varepsilon > 0$ geldt voor $n \to \infty$ de Lindeberg-voorwaarde

$$(18) \qquad \frac{1}{\sigma(n)} \sum_{k=1}^{n} \int_{|y| > \varepsilon\sigma(n)} y^2 dG_k(y+\mu_k) \to 0.$$

Opmerking. Wij hebben hier uitsluitend gesproken over de limietverdeling van de volledige som (17). Bij A. RÈNYI, On the theory of order statistics, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4 (1953), 191-231, vindt men op blz. 211 de limietverdelingen van o.a.

$$\frac{1}{\sigma(n)} \max_{1\le j_n\le k_n} \sum_{k=1}^{j_n} (\underline{y}_k-\mu_k)$$

en

$$\frac{1}{\sigma(n)} \max_{h_n< j_n\le k_n} \sum_{k=1}^{j_n} |\underline{y}_k-\mu_k|,$$

waarbij

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma(n)} \sqrt{\sum_{k=1}^{h_n} \sigma_k^2} = \lambda \quad (0\le\lambda<1).$$

St. 2.3.5. Als de stochastische variabelen $\underline{\tilde{x}}_{nk}$ oneindig klein zijn, dan zijn de volgende twee beweringen equivalent:

a) de rij verdelingsfuncties van $\underline{s}_n$ (5) convergeert zwak naar de Poisson-verdeling met parameter λ en var $\underline{s}_n \to \lambda$;

b) voor elke $\varepsilon > 0$ geldt voor $n \to \infty$

$$(19) \qquad \sum_k \int_{|x-1|\ge\varepsilon} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x) \to 0$$

en

$$(20) \qquad \sum_k \int_{|x-1|<\varepsilon} x^2 d\tilde{F}_{nk}(x) \to \lambda.$$

De constanten A_n zijn $\sum_k \mathcal{E}\,\underline{x}_{nk}-\lambda+ o(1)$ $(n \to \infty)$.

Bewijs

Kolmogorov's representatie van de Poissonverdeling met parameter λ is $\gamma=\lambda$, $K(u)=0$ als $u<1$, $K(u)=\lambda$ als $u>1$. Pas nu st. 2.3.2 toe.

Opmerking. In st. 2.3.2 t/m 2.3.5 wordt het mede convergeren van de varianties steeds uitdrukkelijk vermeld. Dit volgt n.l. niet uit de zwakke convergentie van de verdelingsfuncties, zoals blijkt uit het tegenvoorbeeld van stochastische variabelen $\underline{x}_n$ met verdelingsfuncties

$$F_n(x)=(1-\tfrac{1}{n})\,\iota(x)+\tfrac{1}{n}\,\iota(x-\sqrt{n}).$$

Hier is $\mathcal{E}\,\underline{x}_n = n^{-\frac{1}{2}}$ en $\mathcal{E}\,\underline{x}_n^2=1$ dus var $\underline{x}_n=1-\frac{1}{n}$. Maar Lim $F_n(x)= \iota(x)$ met variantie 0. Voldoende eisen voor het meeconvergeren van momenten zijn vervat in de volgende stelling, die bewezen wordt in H. Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer 1956 blz. 376-377:

St. 2.3.6. Als de verdelingsfuncties $F_n(x)$ van de stochastische variabelen $\underline{x}_n$ zwak convergeren naar de verdelingsfunctie $F(x)$ van de stochastische variabele $\underline{x}$ en voor een positief reëel getal s zijn de momenten $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^s$ uniform in n begrensd, dan geldt
a) voor elk reëel getal r met $0 \leq r \leq s$: $\lim \mathcal{E}|\underline{x}_n|^r = \mathcal{E}|\underline{x}|^r$;
b) voor elk natuurlijk getal $r < s$: $\lim \mathcal{E}\underline{x}_n^r = \mathcal{E}\underline{x}^r$.
Voor het bewijzen van convergentie van de tweede momenten is st. 2.3.6 (met de eis $r < s$) in ons tegenvoorbeeld niet sterk genoeg, want voor elke $\delta > 0$ is de rij $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^{2+\delta} = n^{\frac{1}{2}\delta}$ niet uniform begrensd.

Wij zullen nu het aan het begin van deze paragraaf gestelde limietprobleem bestuderen zonder de beperking van eindige varianties. De "zwakke wet van de grote aantallen" en de in st. 2.3.7 te noemen voorwaarden voor deze wet vormen de grondslag van de latere stellingen. In st. 2.3.8 en 2.3.9 zal worden aangetoond dat er een ongelijkheid is die de rol speelt van (7) in het geval van eindige varianties. St. 2.3.10 is de generalisering van Bawly's st. 2.3.1 over begeleidende verdelingen.

Def. 2.3.2. De rij stochastische variabelen $\underline{v}_n$ heet stabiel als er getallen A_n bestaan zodat geldt $P\text{-}\lim (\underline{v}_n - A_n) = 0$, d.w.z. voor elke $\varepsilon > 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\underline{v}_n - A_n| \geq \varepsilon\} = 0.$$

De verdeling van $\underline{v}_n - A_n$ convergeert dan zwak naar de ontaarde ℓ-verdeling. Het stelsel stochastische variabelen $\underline{x}_{nk}$ voldoet aan de zwakke wet van de grote aantallen, als $\underline{z}_n \overset{\text{def}}{=} \sum_k \underline{x}_{nk}$ een stabiele rij vormen.

Opmerking 1. Uit het bewijs van lemma 2.3.1 volgt direct dat men bij een stabiele rij $\underline{v}_n$ voor de constanten A_n medianen van $\underline{v}_n$ mag kiezen.

Opmerking 2. Voor een rij onafhankelijke variabelen $\underline{y}_j$ met dezelfde verdeling met verwachting μ definiëren wij $\underline{x}_{nk} = \underline{y}_k \cdot n^{-1}$ en $k_n = n$. De zwakke wet van de grote aantallen krijgt dan de bekendere vorm

$$\text{P-lim}\ \frac{\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \ldots + \underline{y}_n}{n} = \mu.$$

St. 2.3.7. Als m_{nk} een mediaan is van $\underline{x}_{nk}$, en $\hat{F}_{nk}$ is de verdelingsfunctie van $\hat{\underline{x}}_{nk} \overset{\text{def}}{=} \underline{x}_{nk} - m_{nk}$, dan voldoen $\underline{x}_{nk}$ dan en slechts dan aan de zwakke wet van de grote aantallen als voor $n \to \infty$

$$\sum_k \int_{|x|>1} d\hat{F}_{nk}(x) \to 0 \tag{21}$$

en

$$\sum_k \int_{|x|\leq 1} x^2 d\hat{F}_{nk}(x) \to 0. \tag{22}$$

Na invoering van de functie

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x^2 & \text{als } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{als } |x| > 1 \end{cases} \tag{23}$$

zijn (21) en (22) te schrijven als

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k h(\hat{\underline{x}}_{nk}) = 0. \tag{24}$$

Dit is equivalent met

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{\hat{\underline{x}}_{nk}^2}{1+\hat{\underline{x}}_{nk}^2} = 0. \tag{25}$$

Opmerking 3. Uit (25) volgt direct

$$\sup_k \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x) = \sup \sum \frac{\hat{\underline{x}}_{nk}^2}{1+\hat{\underline{x}}_{nk}^2} \to 0. \tag{26}$$

Volgens de lemma's 2.3.1 en 2.3.2 zijn de $\underline{x}_{nk}$ dan asymptotisch constant. Een gevolg van st. 2.3.7 is dus dat $\underline{x}_{nk}$ die aan de zwakke wet van de grote aantallen voldoen asymptotisch constant zijn.

Bewijs van st. 2.3.7.

De equivalentie van (21) en (22) met (25) is triviaal als men bedenkt dat geldt

(27) $$\frac{x^2}{1+x^2} \leq h(x) \leq \frac{2x^2}{1+x^2} .$$

Wij laten nu zien dat uit (21) en (22) de zwakke wet van de grote aantallen volgt. Wij voeren de volgende notaties in:

$$\underline{\hat{x}}'_{nk} = \begin{cases} \underline{\hat{x}}_{nk} & \text{als } |\hat{x}_{nk}| \leq 1, \\ 0 & \text{anders;} \end{cases}$$

(28) $$\underline{\hat{z}}_n = \sum_k \hat{x}_{nk} \quad \text{en} \quad \underline{\hat{z}}'_n = \sum_k \underline{\hat{x}}'_{nk} ;$$

$$E_n = \{\text{voor alle } k \text{ is } \underline{\hat{x}}'_{nk} = \underline{\hat{x}}_{nk}\} ;$$

$$A_n = \sum_k (m_{nk} + \mathcal{E}\underline{\hat{x}}'_{nk}) = \sum_k \{m_{nk} + \int_{|x| \leq 1} x \, d\hat{F}_{nk}(x)\}.$$

Nu geldt voor elke $\varepsilon > 0$

(29) $$P\{|\underline{z}_n - A_n| \geq \varepsilon\} \leq P\{E_n\} P\{|\underline{z}_n - A_n| \geq \varepsilon \mid E_n\} + P\{\overline{E}_n\},$$

waarbij

(30) $$P\{\overline{E}_n\} \leq \sum_k P\{|\underline{x}_{nk}| > 1\} = \sum_k \int_{|x| < 1} d\hat{F}_{nk}(x),$$

hetgeen wegens (21) naar nul convergeert, en

$$P\{E_n\} \; P\{|\underline{z}_n - A_n| \geq \varepsilon | E_n\} = P\{|\underline{\hat{z}}_n - \underline{\hat{z}}'_n| \geq \varepsilon | E_n\} P\{E_n\} \leq$$

(31) $$\leq P\{|\underline{\hat{z}}'_n - \underline{\hat{z}}'_n| \leq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2} \text{ var } \underline{\hat{z}}'_n \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-2} \mathcal{E} \underline{\hat{z}}'^2_n = \varepsilon^{-2} \sum_k \int_{|x| \leq 1} x^2 d\hat{F}_{nk}(x),$$

hetgeen wegens (22) naar nul convergeert; in de laatste formulereeks is de ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev gebruikt. De rij $\underline{z}_n$ is dus stabiel en $\underline{x}_{nk}$ voldoen aan de zwakke wet van de grote aantallen.

Het is aanzienlijk bewerkelijker om te bewijzen dat voor $\underline{x}_{nk}$ die aan deze wet voldoen de relaties (21) en (22) gelden. Wij weten nu

dat geldt P-lim $(\underline{z}_n - A_n)=0$ voor zekere getallen A_n. De verdeling van $\underline{z}_n - A_n$ convergeert dan zwak naar de ontaarde verdeling, dus (st.2.1.1) geldt uniform op elk eindig interval

$$(32) \qquad e^{-iA_n t} \prod_k \phi_{nk}(t) \to 1.$$

De volgende relaties gelden dan eveneens uniform op elk eindig interval:

$$(33) \qquad \prod_k |\phi_{nk}(t)| \to 1,$$

$$(34) \qquad \sup_k (1-|\phi_{nk}(t)|) \to 0.$$

Bij het vaste eindige interval $[-1,1]$ voor t kiezen we n zo groot dat uniform in k en t geldt

$$(35) \qquad 1 - |\phi_{nk}(t)| < \tfrac{1}{2}.$$

Dan is

$$(36) \qquad \sum_k (1-|\phi_{nk}(t)|) \leq - \sum_k \log \{1-(1-|\phi_{nk}(t)|)\} = - \log \prod_k |\phi_{nk}(t)|$$

zodat wegens (33) uniform geldt

$$(37) \qquad \lim \sum_k (1-|\phi_{nk}(t)|) = 0.$$

Wij bewijzen nu eerst (21) en (22) voor <u>symmetrisch verdeelde</u> $\underline{x}_{nk}$. Daarvoor is $\phi_{nk}(t) = \int \cos tx \, dF_{nk}(x)$, dus

$$\int_{-1}^{1} \sum_k \{1-\phi_{nk}(t)\}dt = \sum_k \int \int_{-1}^{1} (1-\cos tx)dt \, dF_{nk}(x) =$$

$$(38) \qquad = \sum_k \int \left(2 - \frac{2 \sin x}{x}\right) dF_{nk}(x) \geq \quad ^{1)}$$

$$\geq \sum_k \left\{\frac{1}{4} \int_{|x| \leq 1} x^2 \, dF_{nk}(x) + \frac{1}{5} \int_{|x| > 1} dF_{nk}(x)\right\}.$$

---

1) Wij gebruiken de schattingen $1 - \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{10}$ voor $|x| > 1$ en

$1 - \frac{\sin x}{x} \geq \frac{x^2}{8}$ voor $|x| \leq 1$.

Omdat $\phi_{nk}(t)$ reëel is, geldt wegens (34) vanaf zekere n voor alle t met $|t| \leq 1$, dat $\phi_{nk}(t) = |\phi_{nk}(t)|$ is. Het eerste lid van (38) convergeert nu naar nul wegens (37) en gemajoreerde convergentie. Het laatste lid convergeert mee en voor symmetrische $\underline{x}_{nk}$ geldt $m_{nk} = 0$ en $F_{nk} = \hat{F}_{nk}$, zodat (21) en (22) bewezen zijn.

Voor niet-symmetrische $\underline{x}_{nk}$ definiëren we variabelen $\underline{y}_{nk}$ met dezelfde verdelingen F_{nk} die voor elke n onderling en van alle $\underline{x}_{nk}$ onafhankelijk zijn. De variabelen $\underline{x}^*_{nk} \stackrel{def}{=} \underline{x}_{nk} - \underline{y}_{nk}$ zijn symmetrisch en hebben karakteristieke functies $|\phi_{nk}(t)|^2$; hun verdelingsfuncties noemen we F^*_{nk}. Zowel $\underline{x}_{nk}$ als $\underline{y}_{nk}$ voldoen aan de wet van de grote aantallen, met dezelfde constanten A_n, zodat de rij $\sum_k \underline{x}^*_{nk}$ in wh naar nul convergeert en dus stabiel is.
Uit het reeds bewezene volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \mathcal{E} h(\underline{x}^*_{nk}) = 0.$$

Dit impliceert (21) en (22) wegens het volgende lemma.

Lemma 2.3.4. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onderling onafhankelijk zijn en dezelfde verdeling hebben met mediaan m, en $h(x) = \min(x^2, 1)$ dan is

$$\mathcal{E} h(\underline{x}-\underline{y}) \geq \frac{1}{2} \mathcal{E} h(\underline{x}-m) . \tag{39}$$

Bewijs.
Het is geen beperking m = 0 te stellen: zo nodig gaat men over op $\underline{x}-m$ en $\underline{y}-m$. Als $xy \leq 0$ is, geldt $|x-y| \geq |x|$, dus óf $h(x-y) = |x-y|^2 \geq |x|^2 \geq h(x)$ óf $h(x-y) = 1 \geq h(x)$. Daarom geldt

$$\mathcal{E} h(\underline{x}-\underline{y}) = \iint h(x-y)\, dF(x)\, dF(y) \geq \iint_{xy \leq 0} h(x-y)\, dF(x)\, dF(y) \geq$$

$$\geq \int_{y \leq 0} dF(y) \int_{x \geq 0} h(x)\, dF(x) + \int_{y \geq 0} dF(y) \int_{x < 0} h(x)\, dF(x) \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2} \int h(x)\, dF(x) = \tfrac{1}{2} \mathcal{E}\, h(\underline{x}).$$

Hiermee is het lemma, en tevens st. 2.3.7, bewezen.

St. 2.3.8. Als de verdeling van $\underline{s}_n$ (5) zwak convergeert naar een limietverdeling, dan is er een constante C zodat voor alle n geldt

$$(40) \qquad \sum_k \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk}) = \sum_k \mathcal{E}\, \frac{\hat{\underline{x}}_{nk}^2}{1+\hat{\underline{x}}_{nk}^2} < C.$$

Bewijs.

Voor elke rij constanten a_n met $\lim a_n = 0$ is P-lim $a_n \underline{s}_n = 0$: omdat de verdelingen van $\underline{s}_n$ een convergente rij vormen wordt n.l. $P\{|a_n \underline{s}_n| \geq \varepsilon\}$ willekeurig klein als $n \to \infty$ bij vaste $\varepsilon > 0$. De rij $a_n \underline{s}_n$ is dus stabiel, zodat volgens st. 2.3.7 geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \mathcal{E}\, \frac{a_n^2\, \hat{\underline{x}}_{nk}^2}{1+a_n^2\, \hat{\underline{x}}_{nk}^2} = 0.$$

Maar voor $|a_n| \leq 1$ is voor elke $\underline{x}$

$$\mathcal{E}\, \frac{a_n^2\, \underline{x}^2}{1+a_n^2\, \underline{x}^2} \geq a_n^2\, \mathcal{E}\, \frac{\underline{x}^2}{1+\underline{x}^2}.$$

Dit kan alleen voor elke rij $a_n \to 0$ gelden als (40) juist is.

Lemma 2.3.5. Voor oneindig kleine $\underline{x}_{nk}$ en vaste $\tau > 0$ is $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_k |\nu_{nk}| = 0$, als

$$(41) \qquad \nu_{nk} \overset{\text{def}}{=} \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x).$$

Bewijs.

Voor $0 < \varepsilon < \tau$ is

$$|\nu_{nk}| \leq \int_{|x|<\varepsilon} |x| dF_{nk}(x) + \tau \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leq$$

$$\leq \varepsilon + \tau P\{|\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\}.$$

Kies nu eerst ε klein en dan n voldoende groot.

St. 2.3.9. Als $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn en de verdeling van $\underline{s}_n$ (5) convergeert zwak naar een limietverdeling, terwijl ν_{nk} gegeven wordt door (41) voor zekere $\tau > 0$ en F'_{nk} de verdelingsfunctie is van $\underline{x}'_{nk} \overset{\text{def}}{=} \underline{x}_{nk} - \nu_{nk}$, dan is er een constante D zodat voor alle n geldt

$$\sum_k \int \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x) < D. \tag{42}$$

Bewijs.

Omdat de integrand van (42) tussen 0 en 1 ligt en $k_n < \infty$ is, is het voldoende het bewijs te leveren voor voldoend grote n. Hierbij zullen wij st. 2.3.8 gebruiken, die spreekt over $\hat{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x+m_{nk})$ in plaats van $F'_{nk}(x) = F_{nk}(x+\nu_{nk})$. Omdat $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn, geldt $\sup_k |\nu_{nk}| \to 0$ (lemma 2.3.5) en $\sup_k |m_{nk}| \to 0$ (zie het bewijs van lemma 2.3.1). Dus is ook

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k |\gamma_{nk}| = 0, \text{ waar } \gamma_{nk} \overset{\text{def}}{=} m_{nk} - \nu_{nk}. \tag{43}$$

Met $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ concluderen wij nu:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x) = \int \frac{(x+m_{nk}-\nu_{nk})^2}{1+(x+m_{nk}-\nu_{nk})^2} d\hat{F}_{nk}(x) \leq$$

$$\leq \int \frac{2\,x^2\, d\hat{F}_{nk}(x)}{1+(x+\gamma_{nk})^2} + 2\,\gamma_{nk}^2 \int d\hat{F}_{nk}(x) \leq \tag{44}$$

$$\leq 2A \int \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}_{nk}(x) + 2\,\gamma_{nk}^2 .$$

Voor de constante A kan men b.v. $\frac{9}{5}$ kiezen voor elke zo grote n dat $\sup|\gamma_{nk}| < \frac{1}{3}$ is. Immers dan is

$$\frac{x^2/(1+x^2)}{x^2/\{1+(x+\gamma_{nk})^2\}} = 1 + \frac{\gamma_{nk}(2x+\gamma_{nk})}{1+x^2} \geq 1 - \frac{4}{3}|\gamma_{nk}| > \frac{5}{9},$$

omdat voor $|x| < \frac{1}{3}$ geldt $|2x+\gamma_{nk}| < 1 \leq 1+x^2$, en voor $|x| \geq \frac{1}{3}$:

$$\frac{|2x+\gamma_{nk}|}{1+x^2} \leq \frac{2|x|}{1+x^2} + \frac{|\gamma_{nk}|}{1} \leq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Als n zo groot wordt gekozen dat $\sup|m_{nk}| < \frac{\tau}{2}$ is, geldt met substitutie $y = x-m_{nk}$ de volgende schatting:

$$\gamma_{nk}^2 = (\nu_{nk}-m_{nk})^2 = \{\int_{|x|<\tau} (x-m_{nk})\, dF_{nk}(x) - \int_{|x|\geq\tau} m_{nk}\, dF_{nk}(x)\}^2 \leq$$

$$\leq 2\{\int_{|y+m_{nk}|<\tau} |y|\, d\hat{F}_{nk}(y)\}^2 + 2\, m_{nk}^2 \{\int_{|y+m_{nk}|\geq\tau} d\hat{F}_{nk}(y)\}^2 \leq$$

$$\leq 2\{\int_{|y|<2\tau} |y|\, dF_{nk}(y)\}^2 + 2\, m_{nk}^2 \{\int_{|y|\geq\frac{\tau}{2}} d\hat{F}_{nk}(y)\}^2 \leq$$

$$\leq 2\int_{|y|<2\tau} y^2 d\hat{F}_{nk}(y) + 2\,\frac{\tau^2}{4} \int_{|y|\geq\frac{\tau}{2}} d\hat{F}_{nk}(y).$$

Bij de laatste stap is gebruikt $\{\int|x|\,dF\}^2 \leq \int x^2 dF . \int dF$ resp. $\sup|m_{nk}| < \frac{\tau}{2}$ en $p^2 < p$ voor $0 < p < 1$. Er volgt

$$\gamma_{nk}^2 \leq 2(1+4\tau^2) \int_{|y|<2\tau} \frac{y^2}{1+y^2}\, d\hat{F}_{nk}(y) + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{1+\tau^2/4}{\tau^2/4} \int_{|y|\geq\frac{\tau}{2}} \frac{y^2}{1+y^2}\, d\hat{F}_{nk}(y) \leq$$

(45)

$$\leq (4 + 8\tfrac{1}{2}\,\tau^2) \int \frac{y^2}{1+y^2}\, d\hat{F}_{nk}(y).$$

Door combinatie van (44), (45) en st. 2.3.8 blijkt, voor voldoend grote n:

$$\sum_k \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dF'_{nk}(x) \leq 2AC + (2 + 8\tfrac{1}{2}\tau^2)C.$$

Hiermee is st. 2.3.9 bewezen. Wij formuleren nu een generalisering van st. 2.3.1 :

St. 2.3.10. Als $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn, convergeert de verdeling van $\underline{s}_n$ (5) dan en slechts dan zwak naar een verdelingsfunctie als de oneindig deelbare begeleidende verdelingen met karakteristieke functies ψ_n convergeren; hierbij is

$$(46) \qquad \text{Log } \psi_n(t) = it\Big(\sum_k \nu_{nk} - A_n\Big) + \sum_k \int (e^{itx}-1)\, dF'_{nk}(x);$$

$$F'_{nk}(x) = F_{nk}(x+\nu_{nk}); \qquad \nu_{nk} = \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x),$$

voor vaste $\tau > 0$. Beide rijen verdelingen hebben dezelfde, oneindig deelbare, limiet.

Bewijs.

I) Inleiding. In dit gedeelte onderstellen wij alleen dat $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn. Uit

$$(47) \qquad \text{Log } \psi_n(t) = it\Big[\sum_k \nu_{nk} - A_n + \sum_k \int \frac{x}{1+x^2}\, dF'_{nk}(x)\Big] +$$

$$+ \int (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \sum_k dF'_{nk}(x)$$

volgt dat de begeleidende verdelingen oneindig deelbaar zijn, want in de Lévy-Khintchine representatie (st. 2.2.5) met

$$(48) \qquad G_n(u) = \sum_k \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF'_{nk}(x)$$

is $G_n(\infty)$ voor elke eindige n begrensd als eindige som van integralen die elk hoogstens 1 zijn. Zoals in het bewijs van st. 2.3.1 merken wij verder op, dat de karakteristieke functie van $\underline{s}_n$ is

$$\phi_n(t) = e^{it(\sum_k \nu_{nk} - A_n)} \prod_k \phi'_{nk}(t),$$

als $\phi'_{nk}(t) = \phi_{nk}(t)\, e^{-i\nu_{nk}t}$ de karakteristieke functie van $\underline{x}'_{nk} = \underline{x}_{nk} - \nu_{nk}$ is. Voor

$$\beta_{nk}(t) \stackrel{def}{=} \phi'_{nk}(t) - 1 = \int (e^{itx}-1)\, dF'_{nk}(x) \tag{49}$$

geldt

$$\sup_k |\beta_{nk}(t)| \leq \sup |1-\phi_{nk}(t)| + \sup |1-e^{-i\nu_{nk}t}|. \tag{50}$$

Beide termen rechts convergeren uniform op elk eindig t-interval naar nul als $n \to \infty$, wegens lemma 2.3.3 resp. lemma 2.3.5. Volgens het bewijs van st. 2.3.1, maar met β_{nk} i.p.v. α_{nk}, vindt men uniform op elk eindig t-interval voor voldoend grote n:

$$\sum_k |\mathrm{Log}\, \phi'_{nk}(t) - \beta_{nk}(t)| \leq \sup_k |\beta_{nk}(t)| \sum_k |\beta_{nk}(t)|. \tag{51}$$

De eerste factor van het rechterlid convergeert naar nul (50); we willen aantonen dat de tweede begrensd is. Met schattingen $|e^{itx}-1| \leq |e^{itx}-1-itx|+|tx|$ voor $|x| < \tau$ en $|e^{itx}-1| \leq 2$ voor $|x| \geq \tau$ vindt men

$$|\beta_{nk}(t)| \leq \frac{t^2}{2} \int_{|x|<\tau} x^2\, dF'_{nk}(x) + |t| \int_{|x|<\tau} x\, dF'_{nk}(x) + 2 \int_{|x|\geq\tau} dF'_{nk}(x). \tag{52}$$

Omdat $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn kunnen wij n zo groot kiezen dat $\sup|\nu_{nk}| < \frac{\tau}{2}$ is. De middelste term in het rechterlid van (52) schat men nu via

$$\left|\left(\int_{|x|<\tau} - \int_{|x+\nu_{nk}|<\tau}\right) x\, dF'_{nk}(x)\right| \leq$$

$$\leq \int_{\frac{\tau}{2}<|x|\leq\frac{3\tau}{2}} |x|\, dF'_{nk}(x) \leq \frac{3\tau}{2} \int_{|x|\geq\frac{\tau}{2}} dF'_{nk}(x) \tag{53}$$

en, met $y = x + \nu_{nk}$,

$$\left| \int_{|x+\nu_{nk}|<\tau} x \, dF'_{nk}(x) \right| = \left| \int_{|y|<\tau} (y - \nu_{nk}) \, dF_{nk}(y) \right| =$$

(54)

$$= \left| \nu_{nk} - \int_{|y|<\tau} \nu_{nk} \, dF_{nk}(y) \right| = |\nu_{nk}| \int_{|y|\geq\tau} dF_{nk}(y) \leq \frac{\tau}{2} \int_{|x|\geq\frac{\tau}{2}} dF'_{nk}(x).$$

II) Bewijs slechts dan. Nu is gegeven dat de rij verdelingen van $\underline{s}_n$ convergeert, dus (st. 2.3.9) is voor alle n

$$\sum_k \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dF'_{nk}(x) < D, \tag{55}$$

dus ook

$$\sum_k \int_{|x|<\tau} x^2 dF'_{nk}(x) < (1+\tau^2)D \text{ en } \sum_k \int_{|x|\geq\sigma} dF'_{nk}(x) < \frac{1+\sigma^2}{\sigma^2} D. \tag{56}$$

Combinatie van (52) t/m (54) en (56) geeft

$$\sum_k |\beta_{nk}(t)| \leq \left[\frac{t^2}{2} (1+\tau^2) + |t| \left(\frac{3\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \frac{4+\tau^2}{\tau^2} + 2 \frac{1+\tau^2}{\tau^2} \right] D.$$

Het rechterlid van (51) convergeert nu uniform op elk eindig t-interval naar nul, zodat hetzelfde geldt voor $|\text{Log } \phi_n(t) - \text{Log } \psi_n(t)|$. De begeleidende verdelingen convergeren dus ook, de limietverdeling is dezelfde en is oneindig deelbaar als limiet van oneindig deelbare verdelingen.

III) Bewijs dan. Als de begeleidende verdelingen zwak convergeren is het linkerlid van (55) eveneens begrensd, want het is volgens (48) juist $G_n(\infty)$ en de rij van deze getallen convergeert naar een eindig getal $G(\infty)$ volgens st. 2.2.6. Het verdere bewijs verloopt zoals bij II).

St. 2.3.11. (Khintchine). De verdelingsfunctie F(x) is dan en slechts dan zwakke limiet van een rij verdelingsfuncties van sommen $\underline{s}_n$ (5), met asymptotisch constante $\underline{x}_{nk}$, als F oneindig deelbaar is.

Bewijs.

De limietverdeling van $\underline{s}_n$ met oneindig kleine $\underline{x}_{nk}$ is volgens st. 2.3.10 tevens limiet van een rij oneindig deelbare begeleidende verdelingen. Omgekeerd kan men bij een oneindig deelbare F direct geschikte $\underline{x}_{nk}$ vinden wegens de definitie van oneindig deelbaar (Def. 2.2.1). Voor asymptotisch constante $\underline{x}_{nk}$ telt men $\sum m_{nk}$ bij A_n op; $\underline{x}_{nk} - m_{nk}$ zijn oneindig klein (lemma 2.3.1).

Het onderzoek naar de zwakke convergentie van verdelingen van sommen $\underline{s}_n$ van oneindig kleine (of asymptotisch constante) $\underline{x}_{nk}$ is door st. 2.3.10 gereduceerd tot het onderzoek van de convergentie van de begeleidende oneindig deelbare verdelingen. Hun convergentie valt met st. 2.2.6 en st. 2.2.7 (blz.62 en 64) weer te vertalen in zekere eisen, opgelegd aan hun kanonieke representaties. Zo ontstaan de volgende vier stellingen:

St. 2.3.12. Als $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn, convergeert de verdeling van $\underline{s}_n$ (5) dan en slechts dan zwak naar een limietverdeling als er een functie $G \in \mathfrak{M}'$ bestaat (dus een niet-negatief veelvoud van een verdelingsfunctie, zie blz.39-40), zodat $\lim G_n = G$ is, waarbij

$$G_n(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF'_{nk}(x) \tag{57}$$

is; F'_{nk} en ν_{nk} zijn gedefinieerd in (46). Bij de keuze

$$A_n = \sum_k \nu_{nk} + \sum_k \int \frac{x}{1+x^2}\, dF'_{nk}(x) = \gamma + o(1) \qquad (n \to \infty) \tag{58}$$

heeft de limietverdeling een Lévy-Khintchine representatie (γ, G).

St. 2.3.13. Als $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn, convergeert de verdeling van $\underline{s}_n$ (5) dan en slechts dan zwak naar een limietverdeling, als er een constante $\sigma \geq 0$ bestaat en er niet-dalende functies M en N bestaan, continu van rechts, gedefinieerd op $(-\infty, 0)$ resp. $(0, \infty)$, met $M(-\infty) = N(\infty) = 0$, zodat geldt:

a) in elk continuïteitspunt van M resp. N is

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k F_{nk}(u) = M(u) \qquad \text{als } u < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k \{F_{nk}(u)-1\} = N(u) \qquad \text{als } u > 0.$$

b) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \liminf_{n\to\infty} \sum_k \{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \sum_k \{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2\} = \sigma^2.$$

Bij de keuze

$$A_n = \sum_k \nu_{nk} = \gamma(\tau) + o(1) \qquad (n\to\infty) \tag{59}$$

heeft de limietverdeling een 2e Lévy representatie $\{M, N, \sigma, \gamma(\tau)\}$.

St. 2.3.14. De vorige stelling is eveneens geldig voor asymptotisch constante $\underline{x}_{nk}$, mits we overal $F_{nk}(x)$ vervangen door $\hat{F}_{nk}(x) \stackrel{def}{=} F_{nk}(x+m_{nk})$ en formule (59) vervangen door

$$A_n = \sum_k \int_{|x|<\tau} x d\hat{F}_{nk}(x) + \sum_k m_{nk} = \gamma(\tau) + o(1) \qquad (n\to\infty). \tag{60}$$

St. 2.3.15. Als $\underline{x}_{nk}$ asymptotisch constant zijn en er geldt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \sum_k (\int_{|x|<\varepsilon} x d\hat{F}_{nk}(x))^2 = 0, \tag{61}$$

dan convergeert de verdeling van $\underline{s}_n$ (5) dan en slechts dan zwak naar een limietverdeling, als er een $G \in \mathfrak{M}'$ bestaat met $\operatorname{Lim} H_n = G$, waar

$$H_n(u) \stackrel{def}{=} \sum_k \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}_{nk}(x).$$

Bij de keuze (60) voor A_n heeft de limietverdeling een Lévy-Khintchine representatie $(\gamma(\tau), G)$. De eis (61) is steeds vervuld als de verdeling van elke $\underline{x}_{nk}$ symmetrisch is, maar ook als de constante

$\sigma^2 = G(0+)-G(0-)$ gelijk aan nul is.

Uit st. 2.2.6 en st. 2.3.10, met de representatie (47) van de begeleidende verdelingen, is st. 2.3.12 direct te bewijzen. Voor st. 2.3.13 is het voldoende de equivalentie te bewijzen van enerzijds de eisen a) en b) en anderzijds de beweringen 1) en 2) van st. 2.2.7, waarin men moet substitueren

$$M_n(u) = \sum_k F'_{nk}(u) \qquad \text{voor } u < 0,$$

$$N_n(u) = \sum_k \{F'_{nk}(u)-1\} \qquad \text{voor } u > 0,$$

$$\sigma_n = 0,$$

$$\gamma_n(\tau) = -A_n + \sum_k \nu_{nk} + \sum_k \int_{|x|<\tau} x\,dF'_{nk}(x).$$

Wij zullen deze equivalentie hier niet bewijzen. St. 2.3.14 is vrijwel triviaal. St. 2.3.15 tenslotte volgt uit st. 2.3.14 als we definiëren (vgl. blz.65):

$$G(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\,dM(x) \qquad \text{voor } u < 0,$$

$$G(0) = \sigma^2 + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^2}\,dM(x),$$

$$G(u) = G(0) + \int_{0}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\,dN(x) \qquad \text{voor } u > 0.$$

Dat $\sigma = 0$ (61) impliceert wordt hier niet bewezen.

In de volgende drie stellingen worden de gevonden resultaten toegepast op de normale verdeling:

St. 2.3.16. Als de verdeling van $\underline{z}_n = \sum_k \underline{x}_{nk}$, voor oneindig kleine $\underline{x}_{nk}$, zwak naar een limietverdeling convergeert, is dit dan en slechts dan een normale limietverdeling als één van de volgende, onderling equivalente, condities voor elke $\varepsilon > 0$ vervuld is:

(62) $$\lim_{n\to\infty} \sum_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) = 0;$$

(63) $$\lim_{n\to\infty} P\{\sup_k |\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\} = 0;$$

(64) $$\lim_{n\to\infty} \prod_k \int_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) = 1.$$

Bewijs.

Als (62) geldt, is volgens st. 2.3.13 voor de limietverdeling $M(x) \equiv 0$ en $N(x) \equiv 0$, zodat deze verdeling normaal is. Deze redenering is omkeerbaar. Verder is

$$P\{\sup_k |\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\} = 1 - \prod_k \{1 - \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x)\}$$

en

$$1 - \sum_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leq \prod_k \{1 - \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x)\} \leq e^{-\sum_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x)} \leq 1,$$

waaruit de equivalentie van (62), (63) en (64) volgt.

Opmerking. Bij vergelijking van (62) met de definitie van oneindig klein (Def. 2.3.1):

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) = 0,$$

ziet men dat de eis (62) zwaarder is. Zo zijn de variabelen $\underline{x}_{nk}$ met

$$P\{\underline{x}_{nk} = 0\} = 1-n^{-1}, \quad P\{\underline{x}_{nk} = 1\} = n^{-1} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

oneindig klein, want $\sup_k P\{|\underline{x}_{nk}| > \varepsilon\} = n^{-1} \to 0$ voor $0 < \varepsilon < 1$ en $n \to \infty$. Maar voor $0 < \varepsilon \leq 1$ geldt

$$\prod_k \int_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) = (1-n^{-1})^n \to e^{-1},$$

zodat niet aan de eis (64) is voldaan, en dus evenmin aan (62) of (63).

St. 2.3.17. De volgende twee beweringen zijn equivalent:

a) De verdeling van $\underline{s}_n$ (5) convergeert voor geschikt gekozen A_n naar de standaardnormale verdeling en de $\underline{x}_{nk}$ zijn oneindig klein;

b) Voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt (62) en

$$(65) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_k \{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2 \} = 1.$$

Bewijs.

Voor b) $\Longrightarrow$ a) bedenke men dat uit (62) direct volgt dat de $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn. Men past nu st. 2.3.13 toe en vindt:

$$(66) \qquad M(x) \equiv 0, \quad N(x) \equiv 0, \quad \sigma = 1, \quad \gamma(\tau) = 0;$$

dit is de 2e Lévy representatie van de standaardnormale verdeling. Omgekeerd volgt uit a) dat de condities a) en b) van st. 2.3.13 vervuld zijn met (66) gesubstitueerd. Via enige hier niet weergegeven afschattingen leidt dit tot (62) en (65).

St. 2.3.18. (Bernstein-Feller). Voor een gegeven rij onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{y}_j$ $(j=1,2,\ldots)$ met verdelingsfuncties G_j zijn de volgende beweringen equivalent:

a) er bestaan constanten A_n en $B_n > 0$ zodat de verdeling van

$$(67) \qquad \underline{s}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_n$$

zwak naar de standaardnormale verdeling convergeert, en de variabelen $\underline{x}_{nk} \overset{\text{def}}{=} \underline{y}_k / B_n$ zijn oneindig klein;

b) er is een rij constanten C_n met $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$ waarvoor geldt

$$(68) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|y|>C_n} dG_k(y) = 0;$$

$$(69) \qquad \lim_{n\to\infty} C_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \{ \int_{|y|<C_n} y^2 dG_k(y) - (\int_{|y|<C_n} y\, dG(y))^2 \} = \infty.$$

Bewijs.

Uit a) volgt met $F_{nk}(x) = G_k(B_n x)$ in st. 2.3.17 dat voor elke $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|y|<\varepsilon B_n} dG_k(y) = 0; \tag{70}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \{ \int_{|y|<\varepsilon B_n} y^2 dG_k(y) - (\int_{|y|<\varepsilon B_n} y dG_k(y))^2 \} = 1. \tag{71}$$

Zelfs kunnen wij en rij $\varepsilon_n \to 0$ kiezen met $C_n \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_n B_n \to \infty$, zo dat (70) en (71) gelden met ε_n i.p.v. ε. Hieruit volgt b) direct.
Als omgekeerd b) gegeven is definiëert men

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \{ \int_{|y|<C_n} y^2 dG_k(y) - (\int_{|y|<C_n} y dG_k(y))^2 \}. \tag{72}$$

Wegens (69) is dan $C_n = o(B_n)$ $(n \to \infty)$, zodat uit (68) voor elke $\varepsilon > 0$ (70) volgt. De grootheden $\underline{x}_{nk}$ zijn dus oneindig klein. Met enig rekenwerk kan men nu laten zien dat (71) vervuld is en st. 2.3.17 toepassen.

Noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor convergentie naar een Poisson-verdeling krijgt men door in st. 2.3.13 de representatie van een Poisson-verdeling in te vullen. Wij gaan hier niet op in. Wel volgen hier nog twee stellingen over convergentie naar de ontaarde verdeling. In dit geval zijn convergentie in waarschijnlijkheid en zwakke convergentie synoniem, zodat wij criteria vinden voor de zwakke wet van de grote aantallen (blz.77).

St. 2.3.19. De volgende twee beweringen zijn equivalent:

a) de som $\underline{z}_n = \sum_k \underline{x}_{nk}$ convergeert in waarschijnlijkheid naar nul en de $\underline{x}_{nk}$ zijn oneindig klein;

b) voor elke $\varepsilon > 0$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k} \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) = 0, \tag{73}$$

(74) $$\lim_{n\to\infty} \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x) = 0,$$

(75) $$\lim_{n\to\infty} \sum_k \{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x))^2 \} = 0.$$

Bewijs.
Ook als b) gegeven is zijn de $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein, wegens (73). Zowel voor a) $\Longrightarrow$ b) als voor b) $\Longrightarrow$ a) is nu st. 2.3.13 toepasbaar. De ontaarde verdeling heeft als 2e Lévy representatie $M(x) \equiv 0$, $N(x) \equiv 0$, $\sigma = 0$ en $\gamma(\tau) = 0$.

Opmerking. Convergentie van de in (73), (74) en (75) genoemde reeksen voor één vaste $\varepsilon > 0$, bij de keuze $\underline{x}_{nk} = x_k$ voor alle n, is nodig en voldoende voor convergentie met kans 1 van de reeks $\sum \underline{x}_k$ (drie-reeksenstelling van Kolmogorov). Het bewijs van deze stelling berust in hoofdzaak op de lemma's van Borel-Cantelli.

St. 2.3.20. (Kolmogorov-Feller). Voor de rij onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{y}_k$ met verdelingsfuncties G_k en medianen m_k bestaan dan en slechts dan constanten A_n en $B_n > 0$ zodat voor elke $\varepsilon > 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} P\{ \left| \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_n \right| > \varepsilon \} = 0,$$

als

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int \frac{y^2}{B_n^2 + y^2}\, dG_k(y + m_k) = 0$$

is. Voor willekeurige $\tau > 0$ is een geoorloofde keuze van A_n

$$A_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \{ m_k + \int_{|y|<\tau B_n} y\,dG_k(y + m_k) \}.$$

Bewijs.
Uit st. 2.3.7, met $\underline{x}_{nk} = \underline{y}_k / B_n$.

Tot slot willen wij het in st. 2.3.13 gegeven criterium voor convergentie van de verdeling van $\underline{s}_n$ naar een willekeurige oneindig deelbare verdeling nog in de volgende vorm geven:

<u>St. 2.3.21.</u> Als $\underline{x}_{nk}$ oneindig klein zijn, convergeert de verdeling van $\underline{s}_n(5)$ dan en slechts dan naar een limietverdeling met Lévy representatie $\{M,N,\sigma,\gamma\}$ als geldt:

1° de eis b) van st. 2.3.13 (blz. 89);

$$2^\circ\ C_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\min_k \underline{x}_{nk} \leq x\} \to \begin{cases} 1-e^{-M(x)} & \text{als } x < 0 \text{ een} \\ & \text{cont. punt van } M \text{ is;} \\ 1 & \text{als } x > 0 \text{ is;} \end{cases}$$

$$3^\circ\ D_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\max_k \underline{x}_{nk} \leq x\} \to \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \text{ is;} \\ & \text{als } x > 0 \text{ een} \\ e^{N(x)} & \text{cont. punt van } N \text{ is.} \end{cases}$$

<u>Bewijs</u>. Uit $1-C_n(x) = P\{\min_k \underline{x}_{nk} > x\} = \prod_k (1-F_{nk}(x))$ volgt

$$(76)\qquad \log(1-C_n(x)) = \sum_k \log(1-F_{nk}(x)) =$$

$$= \{-1+o(1)\} \sum_k F_{nk}(x) \quad (n \to \infty).$$

Als 2° juist is, geldt $\log(1-C_n(x)) \to -M(x)$ in elk continuïteitspunt $x < 0$ van M, dus wegens (76) is $\lim_{n\to\infty} \sum_k F_{nk}(x) = M(x)$ in zo'n punt.

Evenzo is $D_n(x) = \prod_k F_{nk}(x)$, dus

$$(77)\qquad \log D_n(x) = \sum_k \log(1-\{1-F_{nk}(x)\}) =$$

$$= \{-1+o(1)\} \sum_k \{1-F_{nk}(x)\} \quad (n \to \infty).$$

Als 3° juist is, volgt dat $\lim_{n\to\infty} \sum_k \{F_{nk}(x)-1\} = N(x)$ is voor elk continuïteitspunt $x > 0$ van N. Uit 1°, 2° en 3° volgt dus, dat de eisen a) en b) van st. 2.3.13 vervuld zijn, en de convergentie van $\underline{s}_n$ volgt uit die stelling.

Is gegeven dat $\underline{s}_n$ in verdeling convergeert, dan keert men

bovenstaande redenering om; men heeft dan 1^{o}, 2^{o} en 3^{o} bewezen behalve $C_n(x) \to 1$ voor $x > 0$ en $D_n(x) \to 0$ voor $x < 0$. Maar voor iedere $\varepsilon > 0$ is

$$1-C_n(\varepsilon) = \prod_k (1-F_{nk}(\varepsilon)) \leq \sup_k (1-F_{nk}(\varepsilon)) \leq \sup_k P\{|\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\} \to 0$$

en

$$D_n(-\varepsilon) = \prod_k F_{nk}(-\varepsilon) \leq \sup_k F_{nk}(-\varepsilon) \leq \sup_k P\{|\underline{x}_{nk}| \geq \varepsilon\} \to 0,$$

zodat ook deze beweringen juist zijn.

Als een schema van variabelen $\underline{x}_{nk}$ gegeven is die asymptotisch voor $n \to \infty$ dezelfde verdeling hebben voor $k = 1,2,\ldots, k_n$ $(k_n \to \infty)$, dan kan men in aansluiting op bovenstaande stelling uitspraken doen over de limietverdeling van andere "order statistics" dan de kleinste en de grootste. Men vindt aanwijzingen bij Loève, p. 332-333 van de 2e en 3e druk.

2.4. Zelfafsplitsbare verdelingen

De klasse $\mathcal{I}$ der oneindig deelbare verdelingen, gedefinieerd op blz. 48, valt samen met de klasse van de zwakke limieten van eindige convoluties van Poisson-verdelingen (st. 2.2.4) en met de klasse van de limietverdelingen van sommen

$$(1) \qquad \underline{s}_n = \sum_k \underline{x}_{nk} - A_n$$

met onderling onafhankelijke en asymptotisch constante $\underline{x}_{nk}$ (st.2.3.1) Hieronder zullen wij de deelklasse $\mathcal{L}$ der zelfafsplitsbare [1] verdelingen definiëren, die samenvalt met de klasse der zwakke limieten van eindige convoluties van verdelingen uit een klasse $\mathcal{G}$ (st.2.4.8) en met de klasse der limietverdelingen van sommen (zie st. 2.4.4)

$$(2) \qquad \underline{s}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_n, \begin{cases} \underline{y}_k \text{ onderling onafhankelijk,} \\ A_n \text{ en } B_n > 0 \text{ geschikte constanten,} \\ \underline{y}_k/B_n \text{ asymptotisch constant.} \end{cases}$$

Def. 2.4.1. De verdelingsfunctie F heet zelfafsplitsbaar (behoort tot de klasse $\mathcal{L}$) als F(x) voor ieder reëel getal c met $0 < c < 1$ de convolutie is van $F(\frac{x}{c})$ en een geschikt gekozen verdelingsfunctie $F_c(x)$. De karakteristieke functie ϕ heet zelfafsplitsbaar (behoort tot $\mathcal{L}$) als er voor iedere c met $0 < c < 1$ een karakteristieke functie ϕ_c bestaat zodat geldt

---

1) De Engelse term is "self-decomposable" (Loève; Pitt; Chung als vertaler van het boek van Gnedenko en Kolmogorov). Voor limietverdelingen van sommen (2) heeft Pitt de naam "cumulative distributions". Loève gebruikt de letter $\mathfrak{N}$ in plaats van de gebruikelijke $\mathcal{L}$.

(3) $\qquad \phi(t) = \phi(ct) \cdot \phi_c(t)$ voor alle reële t.

Opmerking 1. Elke ontaarde verdeling behoort tot $\mathcal{R}$; bij $\phi(t) = \exp(iat)$ is (3) voor de keuze $\phi_c(t) = \exp(ia(1-c)t)$ zelfs voor alle reële c vervuld. Ook elke normale verdeling is zelfafsplitsbaar: bij $\phi(t) = \exp(\mu it - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$ kiest men $\phi_c(t) = \exp(\mu(1-c)it - \frac{1}{2}\sigma^2(1-c^2)t^2)$.

Voor elke karakteristieke functie ϕ geldt (3) triviaal voor c=0, met $\phi_0(t) \equiv \phi(t)$, en voor c=1, met $\phi_1(t) \equiv 1$. Uitbreiden tot $c > 1$ is in het algemeen niet mogelijk:

St. 2.4.1. Als ϕ en ϕ_c karakteristieke functies van niet-ontaarde verdelingen zijn en voor zekere $c > 0$ geldt (3), dan is $c < 1$.

Bewijs. Hierboven is al gezegd dat $\phi_c(t) \equiv 1$ moet zijn voor c=1. Als $c > 1$ is, substitueert men telkens $\frac{t}{c}$ voor t in (3), waaruit wegens $|\phi_c(t)| \leq 1$ volgt

$$1 \geq |\phi(t)| \geq |\phi(\tfrac{t}{c})| \geq \phi(\tfrac{t}{c^2}) \geq \ldots \geq \lim_{n\to\infty} |\phi(\tfrac{t}{c^n})| = |\phi(0)| = 1.$$

Volgens stelling 2.1.7 behoort ϕ (dus ook ϕ_c) dan bij een ontaarde verdeling.

St. 2.4.2. Als ϕ zelfafsplitsbaar is, dan is $\phi(t) \neq 0$ voor elke reële t.

Bewijs. Stel dat voor zekere $a > 0$ gold $\phi(2a) = 0$ en $\phi(t) \neq 0$ voor $0 \leq t < 2a$. Voor elke c met $0 < c < 1$ is dan in (3)

$$0 = \phi(2a) = \phi(2ac)\,\phi_c(2a),$$

waarbij de eerste factor rechts niet nul is dus de tweede wel. Met st. 2.1.6 vindt men

$$1 = 1-\mathrm{Re}\ \phi_c(2a) \leq 4\{1-\mathrm{Re}\ \phi_c(a)\} = 4\{1-\mathrm{Re}\,\frac{\phi(a)}{\phi(ac)}\}.$$

Voor $c \to 1$ nadert $\phi(ac)$ tot $\phi(a)$, dus het rechterlid convergeert naar nul. De onderstelling leidt dus tot de tegenspraak $1 \leq 0$. Men bewijst evenzo dat er geen $a < 0$ met de gestelde eigenschap is.

Opmerking 2. De klasse der limietverdelingen van sommen (2) verandert niet als we eisen dat $\underline{y}_k/B_n$ oneindig klein is i.p.v. asymptotisch constant. Immers als bij asymptotisch constante $\underline{y}_k/B_n$ constanten A_n en $B_n > 0$ behoren, en m_k medianen van $\underline{y}_k$ zijn, dan definiëert men

$$(4) \qquad \hat{\underline{y}}_k = \underline{y}_k - m_k, \quad \hat{A}_n = A_n - \sum_{k=1}^{n} m_k/B_n, \quad \hat{B}_n = B_n.$$

Nu is $\frac{1}{B_n} \sum \hat{\underline{y}}_k - \hat{A}_n = \frac{1}{B_n} \sum \underline{y}_k - A_n$, terwijl m_k/B_n mediaan van $\underline{y}_k/B_n$ is zodat $\hat{\underline{y}}_k/B_n$ oneindig klein zijn (lemma 2.3.1).

St. 2.4.3. (Khintchine). Als de sommen (2) een niet-ontaarde limietverdeling hebben, dan geldt (a) $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ en (b) $\lim_{n\to\infty} B_{n+1}/B_n = 1$.

Bewijs. Volgens opmerking 2 mogen we $\underline{y}_k/B_n$ oneindig klein onderstellen. Deze stochastische variabele heeft karakteristieke functie $\psi_k(t/B_n)$, als $\psi_k(t)$ de karakteristieke functie van $\underline{y}_k$ is. Uit het oneindig klein zijn van $\underline{y}_k/B_n$ volgt wegens lemma 2.3.3

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_k \left| \psi_k(t/B_n) - 1 \right| = 0.$$

Stel nu dat (a) onjuist is. Er is dan een oneindige verzameling van begrensde B_n's. Voor een geschikt getal B met $0 < B < \infty$ [2] kunnen we een stijgende deelrij indices n_j vinden met $\lim_{j\to\infty} B_{n_j} = B$. De karakteristieke functie ψ_k is continu, zodat voor elke t geldt

---

2) Men kan direct inzien dat $B = 0$ geen verdichtingspunt der (positieve) B_n is, want $\underline{y}_k/B_n$ zijn oneindig klein.

(6) $$\lim_{j\to\infty} \Psi_k\left(\frac{t}{B_{n_j}}\right) = \Psi_k\left(\frac{t}{B}\right).$$

Maar als gevolg van (5) is

(7) $$\lim_{j\to\infty} \Psi_k\left(\frac{t}{B_{n_j}}\right) = 1,$$

zodat $\Psi_k(t/B) = 1$ is voor elke t. De variabelen $\underline{y}_k$ en $\underline{y}_k/B_n$ zouden dus met kans 1 de waarde 0 hebben. De verdeling van de som (2) zou dan voor elke eindige n, en ook in de limiet, een ontaarde verdeling zijn. Dit is in strijd met het gegeven, zodat (a) bewezen is.

Voor het bewijs van (b) schrijft men

(8) $$\underline{s}_{n+1} = \frac{1}{B_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \underline{y}_k - A_{n+1} = \frac{1}{B_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_{n+1} + \frac{\underline{y}_{n+1}}{B_{n+1}}.$$

De verdeling van $\underline{s}_{n+1}$ convergeert naar een niet-ontaarde verdeling F(x). Omdat voor iedere $\varepsilon > 0$

(9) $$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{\underline{y}_{n+1}}{B_{n+1}} \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

is (zie definitie van oneindig klein), heeft ook het rechterlid van (8) zonder de laatste term een naar F(x) convergerende verdeling. Als $F_n(x)$ de verdelingsfunctie van $\sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k$ aangeeft, weten wij nu

(10) $$P\left\{ \frac{1}{B_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_{n+1} \leq x \right\} = F_n\left(B_{n+1}\, x + A_{n+1}\right) \to F(x)$$

en

(11) $$P\left\{ \underline{s}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_n \leq x \right\} = F_n(B_n\, x + A_n) \to F(x).$$

Volgens st. 2.1.5 (convergentie naar type) is dan $\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 1$.

St. 2.4.4. (Lévy). De klasse $\mathfrak{K}$ der zelfafsplitsbare verdelingen (zie def. 2.4.1) valt samen met de klasse der limietverdelingen van sommen (2).

Bewijs. Laat ϕ een zelfafsplitsbare karakteristieke functie zijn, zodat voor elke c met $0 < c < 1$ een karakteristieke functie ϕ_c bestaat die aan (3) voldoet. In het bijzonder $c = \frac{k-1}{k}$ kiezend definiëren wij onderling onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{y}_k$ door voor hun karakteristieke functies ψ_k te kiezen

$$\psi_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\frac{k-1}{k}}(t) = \frac{\phi(kt)}{\phi((k-1)t)} \quad . \tag{12}$$

(Merk op dat de noemer niet nul is wegens st. 2.4.2.) Voor de karakteriestieke functies $\psi_k(t/n)$ van $\underline{y}_k\, n^{-1}$ geldt dan

$$\sup_k \left| \psi_k(t/n) - 1 \right| = \sup_k \left| \frac{\phi(kt/n)}{\phi((k-1)t/n)} - 1 \right| \to 0, \tag{13}$$

en wel uniform op elk eindig t-interval, want de argumenten in teller en noemer verschillen t/n en de karakteristieke functie ϕ is uniform continu (eigenschap k 5 op blz. 2). Met lemma 2.3.3 volgt uit (13) dat $\underline{y}_k/n$ oneindig klein zijn.

De som $\sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k/n$ heeft als karakteristieke functie

$$\prod_{k=1}^{n} \psi_k\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\phi(kt/n)}{\phi((k-1)t/n)} = \phi(t), \tag{14}$$

zodat ϕ reeds voor eindige n de karakteristieke functie is van een som $\underline{s}_n$ die de vorm (2) heeft met $A_n = 0$ en $B_n = n$.

Laat omgekeerd $\phi(t) = \lim \phi_n(t)$ zijn, waar $\phi_n(t)$ de karakteristieke functie van een som (2) is. Bij het bewijs van $\phi \in \mathfrak{K}$ mag men veronderstellen dat de limietverdeling niet-ontaard is, want in Opmerking 1 is al aangetoond dat elke ontaarde verdeling tot $\mathfrak{K}$ behoort.

Als $\Psi_k(t)$ weer de karakteristieke functie van $\underline{y}_k$ is, geldt

$$(15) \qquad \phi_n(t) = \exp(-iA_n t) \prod_{k=1}^{n} \Psi_k(t/B_n) \to \phi(t).$$

Kies een getal c met $0 < c < 1$. Uit st. 2.4.3 volgt dat men bij elke n een getal $m = m(n)$ kan vinden zodat $\lim_{n\to\infty} B_m/B_n = c$ en $m(n) < n$ is. Splits nu het middelste lid van (15)

$$(16) \qquad \phi_n(t) = e^{-iA_m ct} \prod_{k=1}^{m} \Psi_k\left(\frac{t}{B_n}\right) . \; e^{i(A_m c - A_n)t} \prod_{k=m+1}^{n} \Psi_k\left(\frac{t}{B_n}\right).$$

Omdat in (15), met ct voor t en m voor n,

$$(17) \qquad e^{-iA_m ct} \prod_{k=1}^{m} \Psi_k\left(\frac{ct}{B_m}\right) \to \phi(ct)$$

geldt, en

$$(18) \qquad \frac{ct}{B_m} - \frac{t}{B_n} = \frac{t}{B_m}\left(c - \frac{B_m}{B_n}\right)$$

willekeurig klein wordt, nadert de eerste factor van het rechterlid van (16) eveneens tot $\phi(ct)$. De tweede factor is door zijn analytische vorm een karakteristieke functie, en convergeert naar een functie $\phi(t)/\phi(ct)$, die continu is in $t = 0$. Volgens de continuïteitsstelling (st. 1.4.3 of st. 2.1.1) is $\phi(t)/\phi(ct)$ dan een karakteristieke functie. Noemt men deze $\phi_c(t)$, dan is aan (3) voldaan; dus ϕ is zelfafsplitsbaar.

<u>St. 2.4.5.</u> Als ϕ zelfafsplitsbaar is, zijn ϕ en ϕ_c oneindig deelbaar.

<u>Bewijs</u>. Volgens st. 2.4.4 behoort ϕ bij een limietverdeling van sommen (2), zodat ϕ oneindig deelbaar is volgens st. 2.3.11. Definiëer $\underline{y}_k$ en Ψ_k zoals in het eerste gedeelte van het bewijs van st. 2.4.4. Kies bij vaste c ($0 < c < 1$) een rij $m=m(n)$ zodat $m/n \to c$. Dan is wegens (14)

$$(19)\qquad \phi(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_k(\tfrac{t}{n}) = \prod_{k=1}^{m} \psi_k(\tfrac{mtn^{-1}}{m}) \cdot \prod_{k=m+1}^{n} \psi_k(\tfrac{t}{n}) .$$

De eerste factor rechts is $\phi(mtn^{-1})$ en convergeert naar ϕ (ct), zodat de tweede factor blijkbaar naar $\phi_c(t)$ convergeert. Deze tweede factor is echter de karakteristieke functie van

$$(20)\qquad \frac{Y_{m+1}}{n} + \frac{Y_{m+2}}{n} + \ldots + \frac{Y_n}{n} \quad (\frac{Y_k}{n} \text{ oneindig klein})$$

zodat men, weer uit st. 2.3.11, concludeert dat ϕ_c oneindig deelbaar is.

<u>St. 2.4.6.</u> Een oneindig deelbare verdeling is dan en slechts dan zelfafsplitsbaar, als één van de volgende eisen vervuld is:

a) Bij de Lévy-Khintchine representatie (γ , G) zijn de functies

$$(21)\qquad n(u) \stackrel{def}{=} -\int_u^{\infty} (1+e^{-2v})\, dG(e^v)$$

en

$$(22)\qquad m(u) \stackrel{def}{=} -\int_{-\infty}^{u} (1+e^{-2v})\, dG(-e^v)$$

convex voor $-\infty < u < \infty$.

b) Bij de Lévy-Khintchine representatie (γ , G) bestaan de linker- en de rechterafgeleide van G(x) voor $x \in (-\infty, 0)$ en $x \in (0, \infty)$ [dus G is continu voor $x \neq 0$] en op de genoemde intervallen is $(1+x^2)x^{-1}G'(x)$ een niet-stijgende functie; men mag daarbij voor elke x afzonderlijk beslissen of men de linker- of de rechterafgeleide wenst in te vullen.

c) Bij de Lévy representaties hebben M(u) resp. N(u) linker- en rechterafgeleiden voor elke $u < 0$ resp. $u > 0$ [en zijn dus continu] en $uM'(u)$ resp. $u\,N'(u)$ zijn niet-stijgende functies op $(-\infty, 0)$ resp. $(0, \infty)$; keuze van linker- of rechterafgeleide puntsgewijs als bij b).

Bewijs. Eerst tonen wij de equivalentie aan van zelfafsplitsbaarheid en a). Laat $\phi \in \mathfrak{K}$ representatie (γ, G) hebben. Voor elke c met $0 < c < 1$ is $\phi_c(t) = \phi(t)/\phi(ct)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie (st. 2.4.5).
Nu is

$$(23) \quad \log \phi(t) = i\gamma t + \int \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x),$$

en, met ct voor t en cx = y,

$$(24) \quad \log \phi(ct) = i\gamma ct + \int \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+c^{-2}y^2}\right) \frac{1+c^{-2}y^2}{c^{-2}y^2}\, dG(c^{-1}y) =$$

$$= it\left\{\gamma c + \int \frac{y(1-c^2)}{1+y^2}\, dG(c^{-1}y)\right\} + \int \left(e^{ity} - 1 - \frac{ity}{1+y^2}\right) \frac{1+c^{-2}y^2}{c^{-2}y^2}\, dG(c^{-1}y).$$

Aftrekken geeft de representatie (γ_c, G_c) van $\phi_c(t)$, waarin blijkbaar geldt

$$(25) \quad \gamma_c = \gamma(1-c) - \int \frac{y(1-c^2)}{1+y^2}\, dG(c^{-1}y)$$

$$(26) \quad \frac{1+y^2}{y^2}\, dG_c(y) = \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) - \frac{1+c^{-2}y^2}{c^{-2}y^2}\, dG(c^{-1}y).$$

De functie G_c is nu vastgelegd door

$$(27) \quad G_c(-\infty) = 0 \text{ en } dG_c(y) = dG(y) - \frac{c^2+y^2}{1+y^2}\, dG(c^{-1}y),$$

en G_c is van begrensde variatie omdat G dat is. Volgens "gevolg 1" op blz. 57-58 is G_c dan eenduidig door ϕ_c bepaald. Wij weten echter dat ϕ_c oneindig deelbaar is, dus (γ_c, G_c) is een Lévy-Khintchine representatie: dit houdt in dat de door (27) vastgelegde functie G_c niet-dalend moet zijn. Nu is

$$(28) \quad dG_c(0) = (1-c^2)dG(0)$$

zeker niet-negatief. Wij eisen vervolgens dat $G_c(x)$ voor $x > 0$ niet daalt, m.a.w. voor

$$N(x) \stackrel{def}{=} -\int_x^\infty \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) \tag{29}$$

eisen wij dat voor elke vaste c met $0 < c < 1$ de functie

$$\int_x^\infty \frac{1+y^2}{y^2}\, dG_c(y) = N(\tfrac{x}{c}) - N(x) \tag{30}$$

voor $0 < x < \infty$ niet-stijgend is. Stelt men $x = e^u$, dan is met $e^v = y$ in (21)

$$n(u) = -\int_{e^u}^\infty \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) = N(e^u). \tag{31}$$

Blijkbaar moet voor elke $d > 0$

$$n(u+d) - n(u) = N(e^{u+d}) - N(e^u) \tag{32}$$

een niet-stijgende functie van u zijn, dus n(u) is <u>convex</u> $(-\infty < u < \infty)$. Voor negatieve x mag G_c eveneens niet dalen; door $M(-e^u) = -m(u)$ in te voeren vindt men dat $-m(u+d) + m(u)$ een niet-dalende functie van u, dus een niet-stijgende functie van $x = -e^u$ is, zodat m(u) eveneens convex is.

Als omgekeerd de representatie (γ, G) van een oneindig deelbare ϕ aan a) voldoet, bewijst men door omkering van bovenstaande afleiding dat $\phi_c(t) \stackrel{def}{=} \phi(t)/\phi(ct)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie is, zodat ϕ zelfafsplitsbaar is.

Vervolgens bewijzen wij b) uit a). Omdat n(u) convex, niet-dalend en eindig is, zullen zijn rechter- en linkerafgeleide voor elke u bestaan en zal $n'(u)$ niet-stijgend zijn (invullen van rechter- of linkerafgeleide, puntsgewijs te kiezen). Uit

(33) $$n(u) = -\int_u^\infty \frac{1+e^{2v}}{e^{2v}}\, dG(e^v)$$

volgt voor $h \neq 0$

$$\frac{n(u+h)-n(u)}{e^h-1} = \frac{1}{e^h-1}\int_u^{u+h} \frac{1+e^{2v}}{e^{2v}}\, dG(e^v) =$$

(34)

$$= \frac{1+e^{2(u+\Theta h)}}{e^{u+2\Theta h}} \cdot \frac{G(u+h)-G(u)}{e^{u+h}-e^u} \cdot \qquad (0 < \Theta < 1)$$

Voor $h \to 0$ nadert het eerste lid tot de niet-stijgende functie $n'(u)$ (linker- of rechterafgeleide al naar het teken van h). Dus de limiet van het laatste lid bestaat; dit is met $x = e^u$ juist $(1+x^2)x^{-1}G'(x)$. Bewering b) is nu voor $0 < x < \infty$ bewezen; voor $-\infty < x < 0$ gebruikt men de convexiteit van m(u) op analoge wijze.

Omgekeerd volgt a) uit b). Er zijn hoogstens aftelbaar veel punten waar linker- en rechterafgeleide van G verschillend zijn: als de raaklijnen in zo'n punt een hoek α maken, telt men eerst de punten met $|\alpha| > \frac{\Pi}{4}$; dan met $\frac{\Pi}{4} \geq |\alpha| > \frac{\Pi}{8}$ enz. Deze aftelbare puntverzameling heeft G-maat nul omdat G continu is. Voor een integratieinterval $(x, x+h)$ dat 0 niet bevat is $(1+y^2)y^{-2}$ begrensd. Dus uit b) volgt, voor alle $h > 0$ waarvoor $x(x+h) > 0$ is, de ongelijkheid

$$\int_x^{x+h} \frac{1+y^2}{y^2}\, dG(y) = \int_x^{x+h} \frac{1+y^2}{y} G'(y)\, \frac{dy}{y} \geq$$

(35)

$$\geq \int_x^{x+h} \frac{1+c^{-2}y^2}{c^{-1}y} G'(c^{-1}y)\, \frac{dy}{y} = \int_x^{x+h} \frac{1+c^{-2}y^2}{c^{-2}y^2}\, dG(c^{-1}y).$$

Uit (26) blijkt nu dat G_c niet-dalend is op $(-\infty, 0)$ en $(0, \infty)$. Dat hieruit a) volgt is al bewezen.

Tenslotte is de equivalentie van b) en c) direct af te leiden uit

$$(36) \qquad M(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \quad \text{voor } u < 0$$

en

$$(37) \qquad N(u) = -\int_{u}^{\infty} \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \quad \text{voor } u > 0.$$

St. 2.4.7. Een oneindig deelbare verdeling met eindige variantie is dan en slechts dan zelfafsplitsbaar, als in zijn Kolmogorov representatie (γ', K) de linker- en rechterafgeleiden van K(u) voor alle $u \neq 0$ bestaan en $u^{-1} K'(u)$ voor $u < 0$ en $u > 0$ een niet-stijgende functie is (linker- of rechterafgeleide puntsgewijs te kiezen, zie St. 2.4.6 b).

Bewijs. Uit st. 2.4.6 c); voor $u < 0$ resp. $u > 0$ geldt

$$(38) \qquad dM(u) = \frac{dK(u)}{u^2} \quad \text{resp.} \quad dN(u) = \frac{dK(u)}{u^2}.$$

Voorbeelden. De ontaarde verdeling met $G(u) \equiv K(u) \equiv 0$ en de normale verdeling met $G(u) \equiv K(u) \equiv \sigma^2 . \mathbb{1}(x)$ voldoen triviaal aan de beide laatste stellingen en zijn dan ook zelfafsplitsbaar. Uit st. 2.4.7 volgt dat b.v. een verdeling met

$$(39) \qquad K(u) = \begin{cases} 0 & \text{als } u < 0 \\ u^2 & \text{als } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{als } u > 1 \end{cases}$$

eveneens zelfafsplitsbaar is; $u^{-1} K'(u)$ is in de drie gevallen o, 2 en o en is dus niet-stijgend behalve in $u = 0$. Daarentegen behoort de Poisson-verdeling, met $K(u) = \lambda . \mathbb{1}(u-1)$, niet tot $\mathcal{C}$. In de afleiding van de Poisson-verdeling als limiet van de binomiale is het dan ook nodig een dubbele rij variabelen $\underline{x}_{nk}$ te gebruiken; een enkele rij $\underline{y}_k$ levert nooit na normering tot $\underline{y}_k B_n^{-1} - A_n n^{-1}$ een Poisson-verdeling als limiet.

Def. 2.4.2. $\mathcal{G}$ is de klasse der oneindig deelbare verdelingsfuncties met Lévy-Khintchine representatie (γ, G), waar G één van de vormen (p)(q) of (r) heeft:

$$(p)\quad G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als } x < A \\ a \log \frac{1+A^2}{1+x^2} & \text{als } A \leq x < 0 \\ a \log (1+A^2) & \text{als } x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ waarbij } a \geq 0 \text{ en } A < 0;$$

$$(q)\quad G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als } x < 0 \\ b \log (1+x^2) & \text{als } 0 \leq x < B \\ b \log (1+B^2) & \text{als } x \geq B \end{array} \right\} \text{ waarbij } b \geq 0 \text{ en } B > 0;$$

$$(r)\quad G(x) = c \cdot 1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \text{ als } x < 0 \\ \\ c \text{ als } x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ waarbij } c \geq 0.$$

St. 2.4.8. (Kubik). De klasse $\mathcal{H}$ der zelfafsplitsbare verdelingen valt samen met de klasse der zwakke limieten van eindige convoluties van verdelingen uit de hierboven gedefiniëerde klasse $\mathcal{G}$.

Bewijs.

A) Wij bewijzen eerst $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. In de representatie van een verdeling uit $\mathcal{G}$ is de functie G van de vorm (p), (q) of (r). Dan is G continu, en linker- en rechterafgeleide bestaan, voor alle $x \neq 0$. Verder is

$$\text{voor (p)} \quad \frac{1+x^2}{x} G'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als } x < A \\ -2a & \text{als } A < x < 0, \\ 0 & \text{als } x > 0, \end{array} \right.$$

$$\text{voor (q)} \quad \frac{1+x^2}{x} G'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als } x < 0, \\ 2b & \text{als } 0 < x < B, \\ 0 & \text{als } x > B, \end{array} \right.$$

voor (r) $\frac{1+x^2}{x} G'(x) = 0$ voor alle $x \neq 0$.

Welke $<$ - tekens hier door $\leq$ - tekens vervangen kunnen worden hangt er van af of we de linker- of de rechterafgeleide beschouwen. Behalve in $x = 0$ is $x^{-1}(1+x^2)G'(x)$ dus niet-stijgend. Uit st. 2.4.6. b) volgt nu $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$.

B) Bij $\phi \in \mathfrak{H}$ en $\Psi \in \mathfrak{H}$ behoren karakteristieke functies ϕ_c en Ψ_c die aan (3) voldoen. Nu is ook

(40) $\phi(t) . \Psi(t) = \phi(ct)\, \Psi(ct) \circ \phi_c(t)\, \Psi_c(t)$,

zodat ook het product $\phi\, \Psi$ tot $\mathfrak{H}$ behoort. Eindige convoluties van zelfafsplitsbare verdelingen zijn dus zelfafsplitsbaar.

C) Als voor $\phi_{(n)} \in \mathfrak{H}$ geldt $\phi_{(n)}(t) \to \phi(t)$, uniform op elk eindig t-interval, dan is

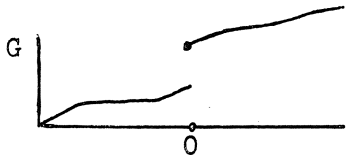
(41) $\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_{(n)}(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_{(n)}(ct) . \phi_{(n)c}(t)$.

De eerste factor van het product rechts convergeert naar $\phi(ct)$. Dus bestaat ook $\phi_c(t) \overset{\text{def}}{=} \lim \phi_{(n)c}(t)$, en de convergentie is uniform op elk eindig t-interval. Volgens st. 2.1.1 is ϕ_c dan een karakteristieke functie. Dus de zwakke limiet van een rij zelfafsplitsbare verdelingen is zelfafsplitsbaar.

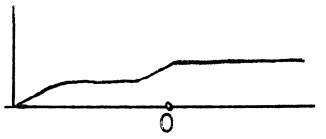
Uit A) B) en C) volgt dat elke zwakke limiet van een eindige convolutie van verdelingen uit $\mathfrak{G}$ tot $\mathfrak{H}$ behoort.

D) Wij bewijzen nu het omgekeerde: kies een verdelingsfunctie $F \in \mathfrak{H}$ met representatie (γ, G). Uiteraard is G overal continu van rechts en niet-dalend. Wegens $F \in \mathfrak{H}$ is G zelfs continu, behalve misschien in $x = 0$ (st. 2.4.6).

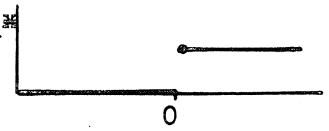
Voer nu in



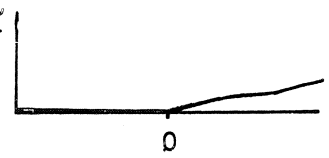
$$\bar{G}(u) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} G(u) & \text{als } u < 0, \\ G(0-) & \text{als } u \geq 0, \end{cases}$$



$$(42) \quad G^{*}(u) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{als } u < 0, \\ G(0)-G(0-) & \text{als } u \geq 0, \end{cases}$$



$$\tilde{G}(u) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{als } u < 0, \\ G(u)-G(0) & \text{als } u \geq 0. \end{cases}$$



Nu is

(43) $G(u) \equiv \bar{G}(u) + G^{*}(u) + \tilde{G}(u)$; $\bar{G}$ en G zijn overal continu.

Definiëer nu voor $k=1,2,\ldots,n2^{n}$:

$$b_{nk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{G}(k2^{-n}) - \tilde{G}((k-1)2^{-n})}{\log(1+k^{2}2^{-2n}) - \log(1+(k-1)^{2}2^{-2n})},$$

$$(44) \quad d_{nk} \overset{\text{def}}{=} \tilde{G}(k2^{-n}) - b_{nk} \log (1 + k^{2}2^{-2n}),$$

$$\tilde{G}_{n}(u) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{als } u < 0, \\ b_{nk} \log (1+u^{2})+d_{nk} & \text{als } (k-1)2^{-n} \leq u < k2^{-n} \\ & (k=1,\ldots,n2^{n}), \\ \tilde{G}(n) & \text{als } u \geq n. \end{cases}$$

Nu is

$$\tilde{G}_n((k-1)2^{-n}) = b_{nk} \log (1+(k-1)^2 2^{-2n}) + \tilde{G}(k2^{-n}) - b_{nk} \log(1+k^2 2^{-2n}) =$$

$$= - \{\tilde{G}(k2^{-n}) - G((k-1)2^{-n})\} + \tilde{G}(k2^{-n}) = \tilde{G}((k-1)2^{-n}),$$

$$\text{en } \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{G}_n(k2^{-n} - \varepsilon) = b_{nk} \log (1+k^2 2^{-2n}) + \tilde{G}(k2^{-n}) +$$

$$- b_{nk} \log (1+k^2 2^{-2n}) = \tilde{G}(k2^{-n}).$$

In elk punt $k2^{-n}$ zijn linker- en rechterlimiet van $\tilde{G}_n$ dus beide gelijk aan $\tilde{G}(k2^{-n})$. Binnen elk interval $((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$ is

$$(45) \qquad \frac{d\tilde{G}_n(u)}{du} = \frac{2ub_{nk}}{1+u^2} \geq 0, \text{ want } b_{nk} \geq 0.$$

Dus $\tilde{G}_n$ is een <u>continue niet-dalende functie</u>. Omdat G een representatie functie is, geldt $G(\infty) < \infty$ en $\tilde{G}(\infty) = G(\infty) - G(0+) < \infty$. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er dus een U zodat voor $u \geq U$ geldt

$$(46) \qquad 0 \leq \tilde{G}(\infty) - \tilde{G}(u) < \varepsilon$$

$\tilde{G}$ is niet-dalend en continu, dus uniform continu: bij $\varepsilon > 0$ bestaat N zodat voor $n \geq N$ geldt

$$(47) \qquad 0 \leq \tilde{G}(k2^{-n}) - \tilde{G}((k-1)2^{-n}) < \varepsilon$$

voor $k=1,2,\ldots,n2^{-n}$. Hiermee is bewezen dat voor $n \geq \max(U,N)$ voor alle reële u $|\tilde{G}(u) - \tilde{G}_n(u)| < \varepsilon$ is, m.a.w. <u>$\lim \tilde{G}_n = \tilde{G}$.</u>

E) Wij moeten nu nog laten zien dat de bij $\tilde{G}_n$ behorende verdeling een eindige convolutie is van verdelingen uit $\mathcal{G}$. Hiervoor hebben wij twee lemma's nodig:

<u>Lemma 1.</u> Als een functie f continu is op $[a,b]$ en in elk punt x van (a,b) bestaan de rechterafgeleide $f'_+(x)$ en de linkerafgeleide $f'_-(x)$, terwijl $f(a) = f(b) = 0$ is, dan is er een getal c zodat $a < c < b$ en $f'_+(c)\, f'_-(c) \leq 0$ is.

Bewijs. Zoals het bewijs van de stelling van Rolle voor differentiëerbare f.

Lemma 2. Als de functies f en h continu zijn op $[a,b]$ en in elk punt van (a,b) linker- en rechterafgeleiden bezitten, terwijl $h(a) \neq h(b)$ is, dan is er een getal c met $a < c < b$ zodat voldaan is aan

$$\text{(I)}\quad \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}\, h_+'(c) - f_+'(c) \leq 0 \quad \text{en} \quad \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}\, h_-'(c) - f_-'(c) \geq 0,$$

of aan

$$\text{(II)}\quad \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}\, h_+'(c) - f_+'(c) \geq 0 \quad \text{en} \quad \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}\, h_-'(c) - f_-'(c) \leq 0.$$

Bewijs. Lemma 2 volgt uit lemma 1 zoals de "uitgebreide middelwaardestelling van de differentiaalrekening" volgt uit de stelling van Rolle.

Wij definiëren

$$\text{(48)}\qquad f_I'(c) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f_+'(c) \text{ in geval (I)}, \\ f_-'(c) \text{ in geval (II)}; \end{cases}$$

$$f_{II}'(c) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f_+'(c) \text{ in geval (II)}, \\ f_-'(c) \text{ in geval (I)}. \end{cases}$$

Uit lemma 2, toegepast op $\tilde{G}(u)$ en $\log(1+u^2)$, volgt dat er een u_k bestaat met $(k-1)2^{-n} < u_k < k2^{-n}$ en

$$\text{(49)}\quad \left\{ b_{nk} \frac{2u_k}{1+u_k^2} - \tilde{G}_+'(u_k) \right\} \left\{ b_{nk} \frac{2u_k}{1+u_k^2} - \tilde{G}_-'(u_k) \right\} \leq 0.$$

Zoals boven onderscheiden wij geval (I) waar de eerste factor niet-positief en de tweede factor niet-negatief is en geval (II) waar dit andersom is. Voor $u > 0$ is $(1+u^2)u^{-1}\tilde{G}'(u) = (1+u^2)u^{-1}G'(u)$ niet-stijgend (st. 2.4.6). Dus geldt $(k=1,2,\ldots,n2^n)$:

$$(50)\qquad b_{n,k+1} \le \frac{1+u_{k+1}^2}{2u_{k+1}}\,\hat{G}_I'(u_{k+1}) \le \frac{1+u_k^2}{2u_k}\,\hat{G}_{II}'(u_k) \le b_{nk}.$$

Verder is uit de definities van d_{nk} en b_{nk} direct na te rekenen:

$$(51)\qquad d_{n,k+1} - d_{nk} = (b_{nk} - b_{n,k+1}) \log (1 + k^2 2^{-2n});$$

$$(52)\qquad d_{n1} = 0.$$

F) Voor $k=1,2,\ldots,n2^n$ voert men nu in,

$$(53)\qquad \hat{G}_{nk}(u) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{als } u < 0, \\ (b_{nk}-b_{n,k+1}) \log (1+u^2) & \text{als } 0 \le u < k2^{-n}, \\ (b_{nk}-b_{n,k+1}) \log (1+k^2 2^{-2n}) & \text{als } u \ge k2^{-n}. \end{cases}$$

Hier is $b_{n,k+1} \overset{\text{def}}{=} 0$ als $k=n2^n$. Uit (50) volgt direct dat $\hat{G}_{nk}$ de vorm (p) heeft van Def. 2.4.2 en dus bij een verdeling uit $\mathcal{G}$ behoort. Dan is

$$(54)\qquad \hat{G}_n(u) = \sum_{k=1}^{n2^n} \hat{G}_{nk}(u) \qquad (-\infty < u < \infty).$$

Immers voor elke u waarvoor $(i-1)2^{-n} \le u < i2^{-n}$, met $1 \le i \le n2^n$, is, geldt

$$\sum_{k=1}^{n2^n} \hat{G}_{nk}(u) = \sum_{k=i}^{n2^n} (b_{nk}-b_{n,k+1}) \log (1+u^2) + \sum_{k=1}^{i-1} (d_{n,k+1}-d_{nk}) =$$

$$(55)$$

$$= b_{n,i} \log (1+u^2) + d_{ni} = \hat{G}_n(u).$$

Voor $u < 0$ zijn linker- en rechterlid van (54) beide gelijk aan nul. Voor $u \ge n$ tenslotte is

$$\sum_{k=1}^{n2^n} \hat{G}_{nk}(u) = \sum_{k=1}^{n2^n} (b_{nk}-b_{n,k+1}) \log (1+k^2 2^{-2n}) =$$

(56)

$$= \sum_{k=1}^{n2^n-1} (d_{n,k+1}-d_{nk}) + b_{n,n2^n} \log(1+n^2) = \hat{G}_n(n) = \hat{G}_n(u).$$

Dus is (54) bewezen, m.a.w.

(57) $$\hat{G} = \text{Lim } \hat{G}_n = \text{Lim} \sum_{k=1}^{n2^n} \hat{G}_{nk}.$$

Op analoge wijze is, voor geschikte $\bar{G}_{nk}$ van de vorm (q),

(58) $$\bar{G} = \text{Lim } \bar{G}_n = \text{Lim} \sum_{k=1}^{n2^n} \bar{G}_{nk}.$$

Nu behoort $G_n \overset{\text{def}}{=} \bar{G}_n + G^{*} + \hat{G}_n$ bij een eindige convolutie van verdelingen uit $\mathcal{G}$ en Lim $G_n = G$, d.w.z. de bijbehorende verdeling convergeert naar de door G gerepresenteerde F.

2.5. Stabiele verdelingen

Def. 2.5.1. De verdelingsfunctie F heet stabiel [1], als bij elk viertal constanten a_1, a_2, $b_1 > 0$ en $b_2 > 0$ constanten a en $b > 0$ bestaan zodat geldt

$$(1) \qquad F\left(\frac{x - a_1}{b_1}\right) * F\left(\frac{x - a_2}{b_2}\right) = F\left(\frac{x - a}{b}\right);$$

dus als $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijk en volgens F verdeeld zijn moet elke som van lineaire functies der $\underline{x}_i$ te schrijven zijn als lineaire functie van een $\underline{x}$ met die zelfde verdeling:

$$(2) \qquad b_1\underline{x}_1 + a_1 + b_2\underline{x}_2 + a_2 = b\underline{x} + a.$$

De karakteristieke functie ϕ heet stabiel [1], als bij elke $B > 0$ geschikte a en $b > 0$ bestaan, zodat geldt

$$(3) \qquad \phi(t)\,\phi(Bt) = \exp(iat)\,\phi(bt).$$

Opmerking 1. Evenals "oneindig deelbaar" en "zelfafsplitsbaar" is "stabiel" een type-eigenschap: een stabiele verdeling blijft stabiel bij verandering van schaal- en/of plaatsparameters.

Opmerking 2. Men ziet direkt, dat de normale en de ontaarde verdeling stabiel zijn. Dit geldt ook voor de Cauchy-verdeling $\phi(t) = \exp(iat - b|t|)$.

---

[1] In het boek van Lévy staat quasi-stabiel; de beperktere klasse waar bovenstaande relaties voor alle $a_i = 0$ vervuld zijn door $a = 0$ en geschikte $b > 0$ noemt Lévy stabiel. Daarnaast kent hij nog semi-stabiele karakteristieke functies ϕ waarbij voor elke $c \neq 0$ geldt $\log \phi(ct) = c^{\alpha} \log \phi(t)$, met de in st. 2.5.2 ingevoerde exponent α.

St. 2.5.1. Een stabiele verdeling is oneindig deelbaar.

Bewijs. Op grond van de stabiliteit vindt men a' en $b' > 0$ waarvoor geldt: $\{\phi(t)\}^n = \exp(ia't)\ \phi(b't)$; dus, met $b't = u$,

$$(4) \qquad \phi(u) = \left\{ \exp \frac{-ia'u}{b'n}\ \phi\left(\frac{u}{b'}\right) \right\}^n .$$

Opmerking 3. Men kan al vermoeden dat een stabiele verdeling ook zelfafsplitsbaar is. Uit (3) volgt nl. met $bt = u$:

$$(5) \qquad \phi(u) = \phi\left(\frac{Bu}{b}\right)\ e^{-iat}\ \phi\left(\frac{u}{b}\right)$$

voor geschikte a en $b > 0$ bij gegeven $B > 0$. Omdat (3) inhoudt $\underline{x}_1 + B\,\underline{x}_2 = b\underline{x} + a$, is het plausibel dat voor $B \neq 0$ geldt $b \to 1$ en dat voor $B \to \infty$ geldt $B/b \to 1$: het getal B/b doorloopt alle getallen c met $0 < c < 1$. Om dit precies te bewijzen kunnen we de relatie $1 + B^\alpha = b^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2)$ gebruiken die bij het bewijs van st. 2.5.2 wordt gevonden. Nu is $\exp(-iat)\ \phi(u/b)$ een karakteristieke functie $\phi_c(u)$ bij $\phi(cu) = \phi(Bu/b)$, zodat ϕ zelfafsplitsbaar is.

St. 2.5.2. Een karakteristieke functie ϕ is dan en slechts dan stabiel, als voor zekere α, β, γ en c met $0 < \alpha \leq 2$, $|\beta| \leq 1$ en $c \geq 0$ geldt

$$(6) \qquad \log \phi(t) = it\gamma - c|t|^\alpha \{1 + i\beta\ \omega(t,\alpha)\ \operatorname{sgn} t\} \qquad 2)$$

$$\text{waar } \omega(t,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi\alpha & \text{als } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t| & \text{als } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{en } \operatorname{sgn} t = \begin{cases} +1 & \text{als } t > 0, \\ 0 & \text{als } t = 0, \\ -1 & \text{als } t < 0. \end{cases}$$

---

2) Bij Lévy en enige anderen heeft β het tegengestelde teken. De vorm (6) is gebruikelijker en wordt gevonden bij Gnedenko & Kolmogorov, Loève, Lukacs en Pitt.

Gevolg. Is een stabiele verdeling symmetrisch om $x = 0$, dus zijn karakteristieke funct e ϕ reëel voor reële t, dan heeft ϕ de vorm

$$\phi(t) = e^{-c|t|^{\alpha}} \quad (0 < \alpha \leq 2,\ c \geq 0). \tag{7}$$

(Ontaarde verdeling voor $c = 0$, Cauchy-verdeling voor $\alpha = 1$, normale verdeling voor $\alpha = 2$).

Opmerking 4. α heet de exponent van de stabiele verdeling en bepaalt de aard van de verdeling, o.a. het bestaan van momenten (gevolg 1 van st. 2.5.12).
β bepaalt de scheefheid, c resp. γ zijn schaal- resp. plaatsparameters.

Bewijs. Laat de stabiele karakteristieke functie ϕ een 1e Lévy representatie $\{M, N, \sigma, \gamma\}$ hebben. Uit (3) volgt

$$\log \phi(t) + \log \phi(Bt) = iat + \log \phi(bt). \tag{8}$$

Als men hierin de (unieke!) Lévy representatie substitueert, vindt men voor $x < 0$ resp. $x > 0$

$$M(x) + M\left(\frac{x}{B}\right) = M\left(\frac{x}{b}\right) \text{ resp. } N(x) + N\left(\frac{x}{B}\right) = N\left(\frac{x}{b}\right). \tag{9}$$

Voor $x > 0$ leidt $x = e^u$ en $n(u) = N(e^u)$ tot $n(u) + n(u - \log B) = n(u - \log b)$. Men kan aantonen dat de algemene oplossing van deze vergelijking is $n(u) = -c_1 \exp(-\alpha u)$ of $N(x) = -c_1 x^{-\alpha}$, waar c_1 en α complexe constanten zijn, waarvoor $1 + B^{\alpha} = b^{\alpha}$ geldt. De representatiefunctie G (samenhang met M en N op blz. 90) wordt alleen dan reëel, niet-dalend en begrensd als α en c_1 reëel zijn en bovendien hetzij $c_1 = 0$ hetzij $c_1 > 0$ en $0 < \alpha < 2$ geldt. Uit de eerste formule van (9) concludeert men evenzo: $M(x) = c_2 |x|^{-\alpha}$, met hetzij $c_2 = 0$ hetzij $c_2 > 0$ en $0 < \alpha < 2$; α is dezelfde als bij N. Met contourintegratie kan men nu bewijzen:

$$\int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) x^{-\alpha-1}\, dx = (-it)^{\alpha}\, \Gamma(-\alpha) + ita_1 \tag{10}$$

als $0 < \alpha < 2$ en $\alpha \neq 1$, en

$$(11)\quad \int_0^\infty \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) x^{-2}\,dx = -\frac{1}{2}\pi|t| - it\log|t| + ita_2$$

voor $\alpha = 1$, waar a_i reële, alleen van α afhangende, constanten zijn. Voor de integralen over $(-\infty,0)$ gebruikt men de toegevoegd complexe versies van (10) en (11). Bij de keuze $\beta = (c_1 - c_2)(c_1 + c_2)^{-1}$; $c = -(c_1 + c_2)\,\alpha \cos\frac{1}{2}\pi\alpha\,\Gamma(-\alpha)$ voor $0 < \alpha < 2$ en $\alpha \neq 1$; $c = \frac{1}{2}\pi(c_1 + c_2)$ voor $\alpha = 1$ en $c = \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\,dG(0)$ voor $\alpha = 2$ ($c_1 = c_2 = 0$) volgt formule (6). De redenering is geheel omkeerbaar, zodat een ϕ die aan (6) voldoet ook stabiel is.

Opmerking 5. Uit (6) ziet men dat de convolutie van twee stabiele verdelingen met verschillende exponent α niet meer stabiel is. Convolutie van verdelingen met parameters $(\alpha, \beta, \gamma, c)$ en $(\alpha, \beta', \gamma', c')$ leidt wel tot een stabiele verdeling, met parameters $(\alpha, (c\beta + c'\beta')(c + c')^{-1}, \gamma + \gamma', c + c')$. Het lijkt niet mogelijk de stabiele verdelingen te omschrijven als de zwakke limieten van eindige convolutie's van verdelingen uit een geschikte klasse (vgl. st. 2.2.4 en st. 2.4.8).

St. 2.5.3. Elke stabiele verdeling behalve de ontaarde is absoluut continu.

Bewijs. Uit formule (6) volgt $|\phi(t)| = \exp(-c|t|^\alpha)$, dus voor $c \neq 0$ is $\int|\phi(t)|\,dt < \infty$. Pas nu st. 1.3.6 (blz. 20) toe.

Opmerking 6. De verdelingsdichtheden van stabiele verdelingen zijn vrijwel nooit door inverteren van de karakteristieke functies te vinden. Behalve de normale verdeling ($\alpha = 2$, $\beta = 0$) en de Cauchy-verdeling ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) is alleen de verdeling met $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$ expliciet bekend; deze heeft (voor $\gamma = 0$ en $c = 1$) de dichtheid

$$(12) \qquad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ als } x < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp(-\frac{1}{2x}) \text{ als } x > 0, \end{cases}$$

d.w.z. Pearson's type V. Voor de combinaties $\alpha = \frac{1}{3}$ $\beta = 1$, $\alpha = \frac{2}{3}$ $\beta = 1$, $\alpha = \frac{3}{2}$ $\beta = 1$, $\alpha = \frac{2}{3}$ $\beta = 0$ en $\alpha = \frac{1}{2}$ β willekeurig zijn de dichtheden (voor $\gamma = 0$ en $c = 1$) door Zolotarev uitgedrukt in hogere transcendente functies. Voor literatuur over analytische eigenschappen en asymptotische ontwikkelingen van de dichtheden van stabiele verdelingen verwijzen wij naar Lukacs (p. 103-106). Zonder bewijs citeren wij de volgende stelling:

St. 2.5.4. Een stabiele verdeling met $0 < \alpha < 1$ en $\beta = 1$ is naar rechts begrensd, d.w.z. er is een $b < \infty$ en een $\varepsilon > 0$ zodat $F(b) = 1$ en $F(b - \varepsilon) < 1$ is; een stabiele verdeling met $0 < \alpha < 1$ en $\beta = -1$ is naar links begrensd, d.w.z. er is een $a > -\infty$ en een $\varepsilon > 0$ zodat $F(a - \varepsilon) = 0$ en $F(a + \varepsilon) > 0$ is.

St. 2.5.5. Als de verdeling van de som

$$(13) \quad \underline{s}_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \underline{y}_k - A_n, \qquad \underline{y}_k \text{ onafhankelijk met dezelfde verdeling,}$$
$$A_n \text{ en } B_n > 0 \text{ geschikte constanten,}$$

naar een limietverdeling convergeert, dan zijn $\underline{x}_{nk} = \underline{y}_k / B_n$ asymptotisch constant.

Bewijs. Wij zullen laten zien dat de karakteristieke functie $\tau_n(t)$ van

$$(14) \qquad \frac{\underline{y}_k}{B_n} - \frac{A_n}{n}$$

naar 1 convergeert. De verdeling van (14) hangt niet van k af, zodat lemma 2.3.3 dan de gewenste conclusie geeft.
Als ψ de karakteristieke functie van $\underline{y}_k$ is, ϕ_n die van $\underline{s}_n$ en ϕ die van de limietverdeling, dan is

(15) $$\tau_n(t) = \psi\left(\frac{t}{B_n}\right) \exp\left(-\frac{itA_n}{n}\right);$$

(16) $$\{\tau_n(t)\}^n = \{\psi\left(\frac{t}{B_n}\right)\}^n \exp(-itA_n) = \phi_n(t) \to \phi(t).$$

Omdat ϕ continu is en $\phi(0) = 1$ is, bestaat er een $T > 0$ zodat voor $|t| < T$ geldt $|\phi(t)| > \frac{1}{2}$. Maar dan is ook, voor $|t| < T$, $\lim \tau_n(t) = 1$, want als dat niet het geval was zouden $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (-T,T)$ en een oneindige deelrij $\{n_k\}$ bestaan met $|\tau_{n_k}(t_0)| < 1 - \varepsilon$. Dit zou inhouden

(17) $$|\phi_{n_k}(t_0)| = |\tau_{n_k}(t_0)|^{n_k} < (1 - \varepsilon)^{n_k};$$

het linkerlid convergeert naar $|\phi(t_0)|$ en het rechterlid naar 0, in tegenspraak met $|\phi(t_0)| > \frac{1}{2}$. Dus geldt $\tau_n(t) \to 1$ voor $|t| < T$, maar wegens (st. 2.1.6) $\mathrm{Re}\,(1 - \tau_n(2t)) \leq 4(1 - \mathrm{Re}\,\tau_n(t))$ ook voor $|t| < 2T$, enz. De uniforme convergentie van $\tau_n(t)$ op elk eindig t-interval is hiermee bewezen.

St. 2.5.6. De klasse der stabiele verdelingen valt samen met de klasse der limietverdelingen van sommen (13).

Opmerking 7. Volgens st. 2.4.4 en st. 2.5.5 zijn deze limietverdelingen, zonder de eis dat $\underline{y}_k$ dezelfde verdeling hebben, juist de zelfafsplitsbare verdelingen. Zoals al in opmerking 3 is aangekondigd, is elke stabiele verdeling dus zelfafsplitsbaar. Een ander bewijs hiervoor volgt uit st. 2.4.6 en de definities van M(x) en N(x) in het bewijs van st. 2.5.2.

Bewijs. Als F een stabiele verdeling is, beschouwen we onafhankelijke variabelen $\underline{y}_k$ met allen de verdelingsfunctie F. Volgens (3) zijn er constanten A_n en $B_n > 0$ zodat $\underline{y}_1 + \underline{y}_2 + \ldots + \underline{y}_n$ de verdelingsfunctie $F(B_n x + A_n)$ heeft. De som (13) heeft dan, al voor eindige n, de verde-

lingsfunctie F(x).

Laat, omgekeerd, F een limietverdeling van sommen (13) zijn. De ontaarde verdeling is stabiel, dus neemt men aan dat F niet ontaard is. Volgens opmerking 7 en st. 2.4.3 geldt dan $B_n \to \infty$ en $B_{n+1}/B_n \to 1$. Kies nu getallen a_1, a_2, $b_1 > 0$ en $b_2 > 0$, dan is er een rij $m = m(n)$ zodat $B_m/B_n \to b_2/b_1$. Nu is

$$\{b_1\left(\frac{\underline{y}_1 + \ldots + \underline{y}_n}{B_n} - A_n\right) + a_1\} + \{\frac{B_m b_1}{B_n}\left(\frac{\underline{y}_{n+1} + \ldots + \underline{y}_{n+m}}{B_m} - A_m\right) + a_2\} =$$

$$(18) \qquad = \frac{b_1}{B_n}(\underline{y}_1 + \ldots + \underline{y}_{n+m}) + a_1 + a_2 - b_1 A_n - \frac{b_1 A_m B_m}{B_n} .$$

De verdelingsfunctie van de eerste term $b_1\underline{s}_n + a_1$ convergeert naar $F(\frac{x - a_1}{b_1})$. Omdat de verdelingsfunctie van $b_2\underline{s}_m + a_2$ naar $F(\frac{x - a_2}{b_2})$ convergeert en $B_m b_1 B_n^{-1} \to b_2$ geldt, convergeert de verdelingsfunctie van $\frac{B_m b_1}{B_n}\underline{s}_m + a_2$ eveneens naar $F(\frac{x - a_2}{b_2})$ (st. 2.1.5). De rij verdelingsfuncties van het linkerlid van (18) convergeert dus voor $n \to \infty$ naar

$$(19) \qquad F(\frac{x - a_1}{b_1}) * F(\frac{x - a_2}{b_2}) .$$

De verdelingsfuncties van het rechterlid van (18), van de vorm $\alpha_{n+m}\underline{s}_{n+m} + \beta_{n+m}$, convergeren dus ook. Volgens st. 2.1.4 moet hun limietverdeling dan van hetzelfde type zijn als F. Dus F is stabiel.

Of een rij verdelingen van sommen (13) inderdaad convergeert, en zo ja naar welke stabiele verdelingsfunctie F, hangt behalve van de keuze van A_n en B_n natuurlijk ook af van de verdelingsfunctie G van de variabelen $\underline{y}_k$. In het volgende zullen wij het verband tussen G en F kort omschrijven; voor de bewijzen van de stellingen raadplege men Gnedenko & Kolmogorov.

Def. 2.5.2. De verdelingsfunctie G wordt aangetrokken door de verdelingsfunctie F, als F de limietverdeling is van sommen (13), met volgens G verdeelde $\underline{y}_k$ en geschikte A_n en $B_n > 0$. De verzameling van alle door F aangetrokken verdelingen heet de aantrekkingssfeer [3] van F.

Het is duidelijk dat alleen stabiele verdelingen een niet-lege aantrekkingssfeer hebben en dat elke stabiele F tot zijn eigen aantrekkingssfeer behoort. Elke verdeling behoort tot de aantrekkingssfeer van de ontaarde verdeling. De aantrekkingssferen van de overige stabiele verdelingen worden onderzocht in de volgende stellingen.

St. 2.5.7. Als de variantie σ^2 van een niet-ontaarde verdeling G eindig is, behoort G tot de aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde normale verdeling.

Bewijs. Als $B_n = n\sigma^2$ is, voldoen $\underline{x}_{nk} = \underline{y}_k / B_n$ aan st. 2.3.3.

St. 2.5.8. G behoort dan en slechts dan tot de aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde normale verdeling, als geldt:

$$(20) \qquad \lim_{C \to \infty} \frac{C^2 \int_{|x| > C} dG(x)}{\int_{|x| < C} x^2 \, dG(x)} = 0 .$$

Bewijsschets. Als G een eindige variantie heeft, is (20) triviaal en geeft st. 2.5.7 het gewenste resultaat. Voor verdelingen G met oneindige variantie kan men bewijzen, dat in (69) op blz. 92 de afgeknotte varianties mogen worden vervangen door afgeknotte tweede momenten. Voor $\underline{y}_k$ met dezelfde verdeling blijkt conditie (20) equivalent te zijn met (68) en de nieuwe versie van (69); pas nu st. 2.3.18 toe.

---

3) Engelse term: domain of attraction; Duitse term: Anziehungsbereich.

St. 2.5.9. G behoort dan en slechts dan tot de aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde normale verdeling, als voor de karakteristieke functie ψ van G uniform in t voor $t \geq 0$ geldt

$$\lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{Re} \log \psi(st)}{\operatorname{Re} \log \psi(s)} = t^2 \quad . \tag{21}$$

Bewijs. Zie de Duitse vertaling van Gnedenko & Kolmogorov; de stelling komt niet voor in de Engelse vertaling.

St. 2.5.10. G behoort dan en slechts dan tot de aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde stabiele verdeling met exponent α $(0 < \alpha < 2)$, als er constanten $c_1 \geq 0$ en $c_2 \geq 0$ $(c_1 + c_2 > 0)$ bestaan zodat geldt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{G(-x)}{1 - G(x)} = \frac{c_1}{c_2} \; ; \tag{22}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - G(x) + G(-x)}{1 - G(kx) + G(-kx)} = k^{\alpha} \text{ voor elke vaste } k > 0. \tag{23}$$

De constanten c_1 en c_2 zijn dezelfde als in het bewijs van st. 2.5.2. Als G een karakteristieke functie ψ heeft en de verwachting $m = \int x \, dG(x)$ bestaat, en men voert in

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t) \text{ als } \alpha \leq 1, \\ \psi(t) \exp(-imt) \text{ als } \alpha > 1, \end{cases} \tag{24}$$

dan is eveneens nodig en voldoende dat voor iedere $t \geq 0$ geldt:

a) voor $0 < \alpha < 2$ en $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{Re} \log \psi(st)}{\operatorname{Re} \log \psi(s)} = t \text{ en } \lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{Im} \log \tilde{\psi}(st)}{\operatorname{Re} \log \psi(s)} = \beta t^{\alpha} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi\alpha;$$

b) voor $\alpha = 1$:

$$\lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{Re} \log \psi(st)}{\operatorname{Re} \log \psi(s)} = 1 \quad \text{en}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{Im} \{\log \tilde{\psi}(st) - s \log \tilde{\psi}(t)\}}{\operatorname{Re} \log \psi(s)} = \frac{2\beta t}{\pi} \log t.$$

Gevolg. Voor elke stabiele verdeling F met exponent α, behalve de normale en de ontaarde verdeling, bestaat $c > 0$ zodat geldt

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} \{1 - F(x) + F(-x)\} = c. \tag{25}$$

Opmerking 8. Asymptotische ontwikkelingen voor de verdelingsfunctie en de verdelingsdichtheid van de som $\underline{s}_n$ (13) bij bovengenoemde convergentie vindt men bij Cramér.

St. 2.5.12. Als G behoort tot de aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde stabiele verdeling met exponent α dan is $\int |x|^{\delta} \, dG(x) < \infty$ voor $0 \leq \delta < \alpha$; als $\alpha < 2$ is divergeert de integraal voor $\delta > \alpha$.

Gevolg 1. Omdat elke stabiele verdeling tot zijn eigen aantrekkingssfeer behoort, is de normale verdeling de enige stabiele verdeling met eindige variantie. De verdelingen met $\alpha > 1$ hebben een verwachting, voor $0 < \alpha \leq 1$ bestaat de verwachting niet.

Gevolg 2. Als G behoort tot de aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde normale verdeling, met normeringsfactor B_n, dan is

$$B_n = o(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{ voor elke } \varepsilon > 0. \tag{26}$$

De aantrekkingssfeer van een stabiele verdeling F wordt kleiner, als we de keuze voor de normeringsconstanten B_n beperken. Wij zullen die keuze van B_n voorschrijven, waarbij F tot zijn eigen aantrekkingssfeer behoort,

dus $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$:

Def. 2.5.3. G behoort tot de normale aantrekkingssfeer van een stabiele verdeling F, als F de limietverdeling is van sommen (13) met volgens G verdeelde $\underline{y}_k$ en constanten $B_n = an^{\frac{1}{\alpha}}$ (a > 0 willekeurig; α exponent van F).

St. 2.5.13. G behoort dan en slechts dan tot de normale aantrekkingssfeer van de standaardnormale verdeling als G een eindige variantie σ^2 heeft. Men moet dan $B_n = \sigma\sqrt{n}$ kiezen en men kan $A_n = \sigma^{-1}\sqrt{n} \int x\, dG(x)$ kiezen.

St. 2.5.14. G behoort dan en slechts dan tot de normale aantrekkingssfeer van een niet-ontaarde stabiele verdeling met exponent α ($0 < \alpha < 2$), als $a > 0$, $c_1 \geq 0$ en $c_2 \geq 0$ ($c_1 + c_2 > 0$) bestaan en functies $\alpha_1(x)$ en $\alpha_2(x)$ bestaan, zodat geldt

$$G(x) = \{ c_1 a^{\alpha} + \alpha_1(x) \} |x|^{-\alpha} \text{ als } x < 0, \tag{27}$$

$$G(x) = 1 - \{ c_2 a^{\alpha} + \alpha_2(x) \} x^{-\alpha} \text{ als } x > 0, \tag{28}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \alpha_1(x) = \lim_{x \to \infty} \alpha_2(x) = 0 . \tag{29}$$

Def. 2.5.4. G behoort tot de partiële aantrekkingssfeer (p.a.sf.) van F, als er een stijgende rij $\{n_j\}$ van natuurlijke getallen is, zodat de rij verdelingen van de volgens (13) genormeerde sommen $\underline{s}_{n_j}$ van volgens G verdeelde $\underline{y}_k$, naar F convergeert.

St. 2.5.15. De p.a.sf. van een niet oneindig deelbare verdeling is leeg. De p.a.sf. van een oneindig deelbare verdeling is niet-leeg.

St. 2.5.16. Men kan stochastische variabelen construeren, die met zo grote kans zo grote waarden aannemen, dat hun verdeling G buiten de p.a.sf. van elke niet-ontaarde verdeling valt. Hiervoor is voldoende:

$$(30) \qquad \lim_{k \to \infty} \lim_{C \to \infty} \inf \frac{\int_{|x| > kC} dG(x)}{\int_{|x| > C} dG(x)} \neq 0 \text{ .}$$

St. 2.5.17. Een verdeling G behoort tot de p.a.sf. van geen enkele (niet-ontaarde) verdeling, van overaftelbaar veel typen verdelingen of van precies één type verdeling; in het laatste geval is G stabiel.

St. 2.5.18. Als H behoort tot de p.a.sf. van G en G behoort tot de p.a.sf. van F, dan behoort H tot de p.a.sf. van F. Elke verdeling in de p.a.sf. van een verdeling met eindige variantie is in de p.a.sf. van de normale verdeling.

St. 2.5.19. Er bestaan "universele verdelingen" die tot de p.a.sf. van elke oneindig deelbare verdeling behoren.

St. 2.5.20. G behoort dan en slechts dan tot de p.a.sf. van de normale verdeling als (20) geldt met lim inf i.p.v. lim.

LITERATUUR

De hier behandelde stof is gebaseerd op hoofdstuk 2 t/m 7 van GNEDENKO-KOLMOGOROV. De Russische uitgave van dit boek verscheen in 1949, een Hongaarse vertaling in 1951. De hieronder genoemde Engelse vertaling (1954) van CHUNG bevat vele kleine en enige grote verbeteringen. In de Duitse vertaling (1959) van HEINHOLD zijn deze grotendeels overgenomen, terwijl GNEDENKO hier bovendien een kort overzicht van de nieuwe ontwikkelingen sinds 1949 heeft toegevoegd.

In hoofdstuk VI (Central Limit Problem) van LOÈVE vindt men onze paragraaf 2.3 vrijwel volledig en 2.2, 2.4 en 2.5 ten dele terug. Dezelfde stof wordt door PITT (blz. 77-94) beknopter behandeld. LUKACS (blz. 79-107) bespreekt een deel van de stof van 2.2, 2.3 en 2.5.

Na de boeken van LÉVY en LINNIK worden hieronder nog de recente artikelen genoemd van CRAMÉR (zie opmerking 8, na st. 2.5.11) en KUBIK (zie st. 2.4.8). Het artikel van DOEBLIN gaat hoofdzakelijk over partiële aantrekkingssferen. TEICHER bespreekt klassen $\mathcal{F}$ van verdelingen die "factor-closed" zijn, d.w.z. als $F \in \mathcal{F}$ als convolutie van twee niet-ontaarde factoren geschreven kan worden behoren beide factoren eveneens tot $\mathcal{F}$.

Uiteraard is dit overzicht zeer onvolledig en is de keuze subjectief.

B.V. GNEDENKO & A.N. KOLMOGOROV, Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley, 1954.
B.V. GNEDENKO & A.N. KOLMOGOROV, Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen, Akademie-Verlag Berlin, 1959.
M. LOÈVE, Probability Theory, Van Nostrand, 1955.
E. LUKACS, Characteristic Functions, Griffin, 1960.
H.R. PITT, Integration, Measure and Probability, Oliver & Boyd, 1963.
P. LÉVY, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

Yu. V. LINNIK, Decomposition of probability distributions, Oliver & Boyd, 1964.

H. CRAMÉR, On asymptotic expansions for sums of independent random variables with a limiting stable distribution, Sankhyā, 25 (1963), 13-24.

W. DOEBLIN, Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, Studia Math. 9 (1940), 71-96.

L. KUBIK, A characterization of the class L of probability distributions, Studia Math. 21 (1962), 245-252.

H. TEICHER, On the factorization of distributions, Ann.Math. 25 (1954), 769-774.